

Chapitre 1

ESPACES PROBABILISES

INTRODUCTION

Considérons l'expérience suivante :

On lance une fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On a 6 **éventualités** ou résultats **possibles**.

On note Ω l'univers des possibles ou l'ensemble des éventualités.

- Épreuve n°1 : on s'intéresse au chiffre apparu.
- Épreuve n°2 : on s'intéresse à la parité du chiffre apparu.

On définit ainsi 2 **épreuves** liées à la même expérience.

Chaque épreuve engendre une **partition** Ω' de Ω .

Ω' est l'ensemble des évènements élémentaires.

Dans cette expérience : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Pour la 1^{ère} épreuve :

$\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$ avec la partition $\Omega_1' = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

- Pour la 2^{ème} épreuve :

$\Omega = \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\}$ avec la partition $\Omega_2' = \{\{1,3,5\}, \{2,4,6\}\} = \{I, P\}$

Un **évènement composé** d'une épreuve est une réunion d'évènements élémentaires de cette épreuve.

- Dans la première épreuve (canonique), il y a 6 événements élémentaires qui forment une partition de Ω constituée par tous les **singletons** éventualités de Ω : $\{i\}$ pour $i \in \{1, \dots, 6\}$
- Dans la deuxième épreuve, il y a 2 événements élémentaires qui forment une **autre** partition de Ω : $I = \{1, 3, 5\}$ (les impairs) et $P = \{2, 4, 6\}$ (les pairs)

Attention : Soit $A = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$

A est un événement (composé) dans la première épreuve.

A n'est **pas** un événement dans la deuxième épreuve.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des évènements liés à une épreuve :

- 1^{ère} épreuve : $\mathcal{B}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\text{card}(\mathcal{B}_1) = 2^{\text{card}(\Omega)} = 2^6 = 64$.
- 2^{ème} épreuve : $\mathcal{B}_2 = \{\emptyset, I, P, \Omega\}$ avec $\text{card}(\mathcal{B}_2) = 4 = 2^2$.

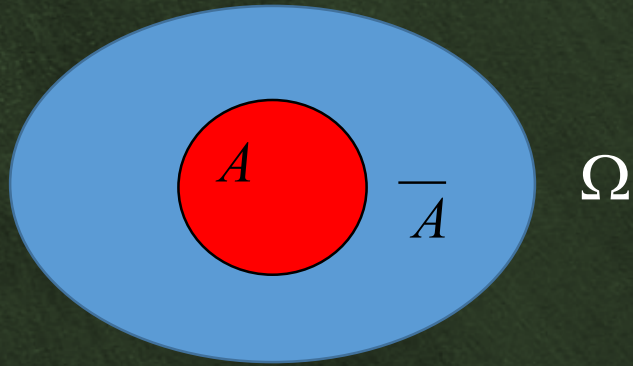
Il y a 64 évènements dans la première épreuve et 4 évènements dans la seconde épreuve.

Ω est appelé **évènement sûr** et $\emptyset$ est **l'évènement impossible**.

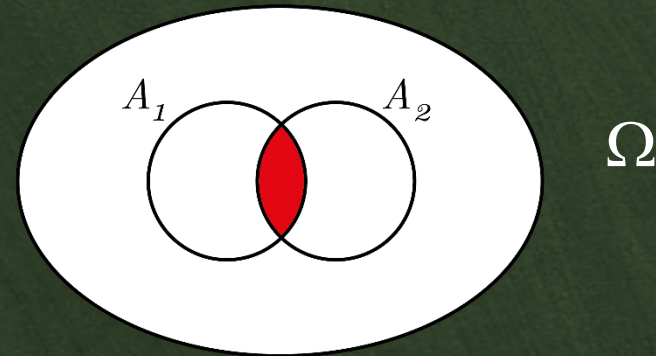
On désigne par $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements liés à une épreuve.

$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{B}^2$, on a :

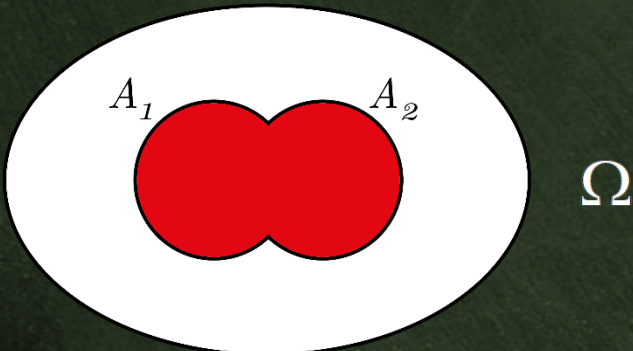
- $\overline{A}$ l'évènement « **contraire** » de A est réalisé.
(également noté A^c).



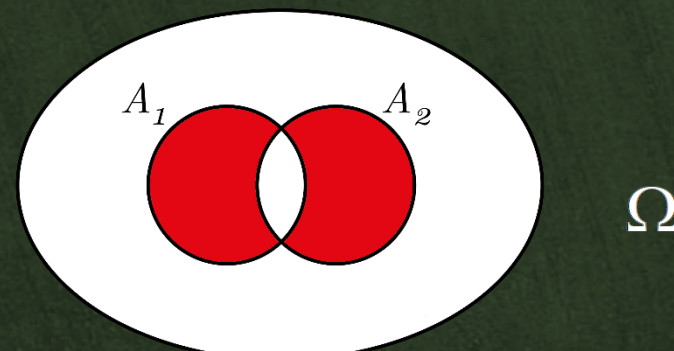
- $A_1 \cap A_2$ l'évènement « A_1 **et** A_2 » est réalisé
(également noté $A_1 \cdot A_2$).



- $A_1 \cup A_2$ l'évènement « A_1 **ou** A_2 » est réalisé.

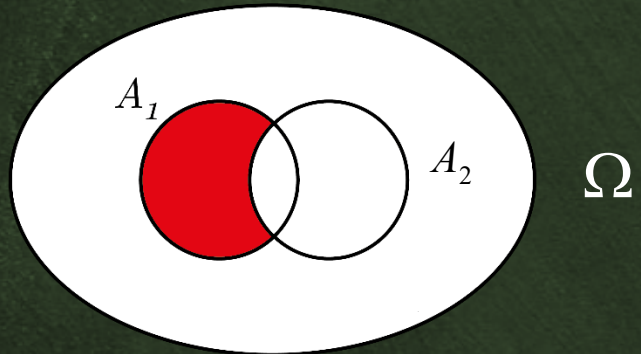


- $A_1 \Delta A_2$ l'évènement « **un et un seul** des évènements A_1 **ou** A_2 » est réalisé.

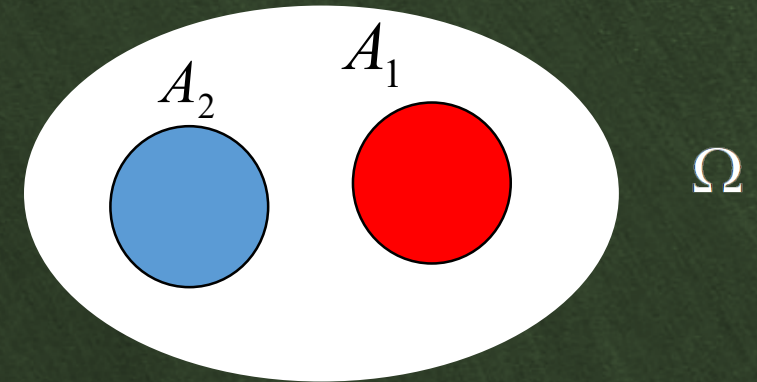


Les résultats de
ces opérations
doivent rester
dans $\mathcal{B}$.

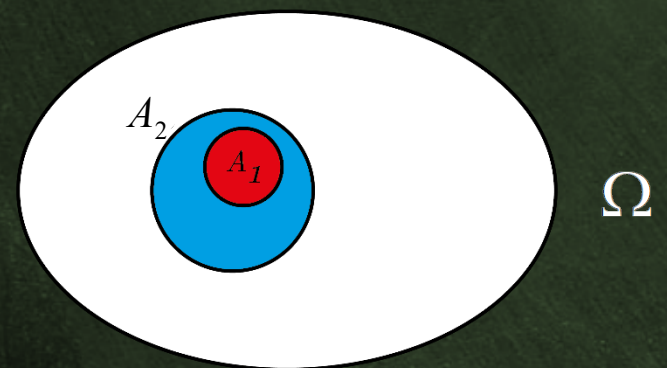
- $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap \overline{A_2}$ est l'évènement
« l'évènement A_1 est réalisé et A_2 ne l'est pas »



- Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ A_1 et A_2 sont dits « **incompatibles** »
 A_1 et A_2 ne peuvent se réaliser simultanément.



- Si $A_1 \subset A_2$ on dit que « la réalisation de
l'évènement A_1 **entraîne** la réalisation de l'évènement A_2 »



- $B = A_1 + A_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ B = A_1 \cup A_2 \end{cases}$
+ est la notation pour « **l'union disjointe** »

ESPACES PROBABILISABLES

Définition d'un espace probabilisable fini

Soit Ω l'univers fini des possibles.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements liés à une épreuve avec $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$\mathcal{B}$ est une **algèbre de Boole** d'évènements (ou une **tribu** sur Ω) si et seulement si :

- $\Omega \in \mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ est stable par passage au **contraire** : $\forall A \in \mathcal{B}, \overline{A} \in \mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ est stable pour **l'union finie** :
$$\begin{cases} \forall A_1 \in \mathcal{B} \\ \forall A_2 \in \mathcal{B} \end{cases} \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$$

$(\Omega, \mathcal{B})$ est appelé **espace probabilisable fini**.

Si $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors la **tribu** est dite **totale** ou **canonique** sur Ω .

Reprenons la deuxième épreuve de l'expérience du jet d'un dé :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } \mathcal{B}_2 = \{\emptyset, I, P, \Omega\}$$

Soit $\Omega_2' = \{I, P\}$ l'ensemble des évènements élémentaires de cette épreuve,

c'est une partition de Ω . On a : $\mathcal{P}(\Omega_2') = \{\emptyset, \{I\}, \{P\}, \Omega_2'\}$

Soit l'application de $\mathcal{P}(\Omega_2')$ dans $\mathcal{B}_2$ notée ϕ :

$\emptyset$	$\mapsto$	$\emptyset$
$\{I\}$	$\mapsto$	I
$\{P\}$	$\mapsto$	P
Ω_2'	$\mapsto$	Ω

ϕ est bijective par construction

$$\text{card } \mathcal{B}_2 = \text{card } \mathcal{P}(\Omega_2') = 2^{\text{card } \Omega_2'}$$

Ainsi : nombre d'évènements de $\mathcal{B}_2 = 2^{\text{nombre d'évènements élémentaires}}$

ù

Cas général

Théorème :

Soit Ω un ensemble **fini** et $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole de parties de Ω .

Il existe une **partition** de Ω en parties E_i ($1 \leq i \leq n$) telle que $\mathcal{B}$ est constituée de l'ensemble vide et de toutes les unions finies d'ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$

- Les $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les évènements élémentaires de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\Omega')$ où Ω' est l'ensemble des $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$
- Toute algèbre de Boole définie sur un **univers fini** a donc un cardinal égal à une puissance de 2 puisque :

$$\text{card } \mathcal{B} = \text{card } \mathcal{P}(\Omega') = 2^{\text{card } \Omega'}$$

ESPACES PROBABILISABLES

Définition d'un espace probabilisable infini

Soit Ω l'univers infini des possibles.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements liés à une épreuve avec $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

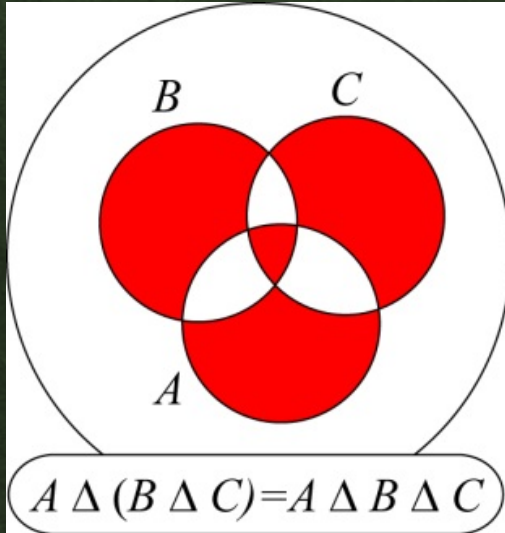
$\mathcal{A}$ est une σ -algèbre de Boole d'évènements (ou une tribu sur Ω) si et seulement si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au contraire : $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est stable pour l'union dénombrable : Si $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{A}$

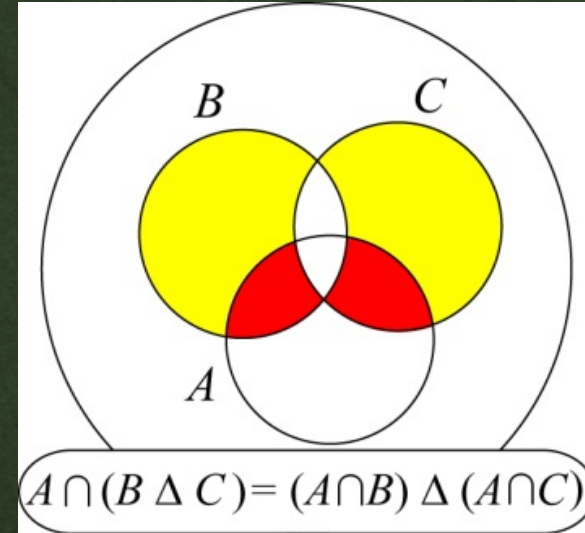
$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable infini**.

$(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ a une structure d'anneau commutatif.

En particulier :



Δ est associative



$\cap$ est distributive par rapport à Δ

Toute algèbre $\mathcal{B}$ ainsi que toute σ -algèbre $\mathcal{A}$ de Ω sont des sous anneaux idempotents de l'anneau $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$.

Pour toute algèbre de Boole $\mathcal{B}$ sur un univers Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

■ $\emptyset \in \mathcal{B}$	
■ <u>Stabilité par une intersection finie</u> $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}^n, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$	■ <u>Stabilité par la différence</u> $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{B}^2, A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{B}$
■ <u>Stabilité par une union finie</u> $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}^n, \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$	■ <u>Stabilité par Δ</u> $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{B}^2, A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{B}$

Toute σ -algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est en particulier une algèbre de Boole et vérifie donc les propriétés ci-dessus.

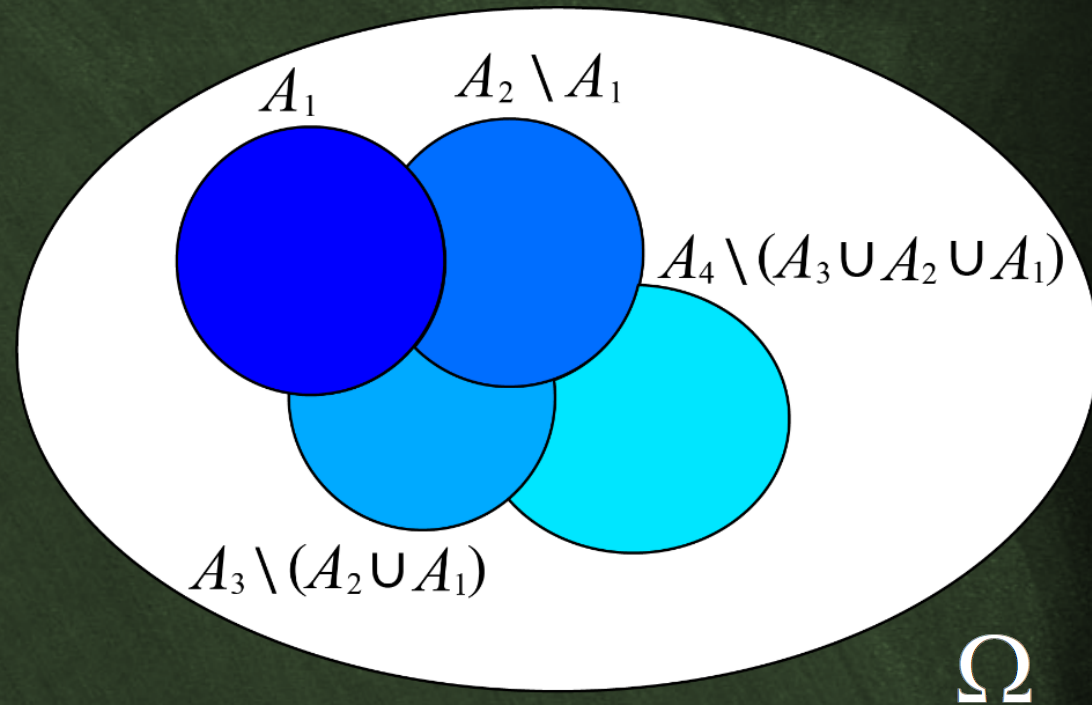
De plus, on a la **stabilité pour l'union dénombrable** (définition) et la **stabilité pour l'intersection dénombrable** :

Si $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{A}$

Lemme de décomposition :

$$\forall n \geq 2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i \subset \Omega$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= \sum_{i=1}^n \left[A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right] \\ &= A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)) + \dots \end{aligned}$$



Autre écriture du lemme :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \left[A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right] = \sum_{i=1}^n \left[A_i \cap \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \right) \right]$$

Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ **tribu des boréliens de $\mathbb{R}$** : est la σ -algèbre de Boole engendrée par les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, demi-droites ouvertes inachevées : $B_a =]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$.

La tribu des boréliens contient donc tous les **singletons** de réels, tous les **intervalles** et leurs **réunions dénombrables**.

$\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ car l'ensemble des rationnels est dénombrable,

$\mathbb{Q}'$ l'ensemble des irrationnels, $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{Q}}$ d'où $\mathbb{Q}' \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Cependant $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ car il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (compliqués) qui ne sont pas des boréliens.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est un espace probabilisable infini non dénombrable.

ESPACES PROBABILISES

Espace probabilisé fini

Considérons $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable fini :

Définition

Probabilité sur un espace probabilisable fini : **Axiomes de Kolmogorov** (1933)

Une (mesure de) **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{B})$ où Ω est fini, est une application $\mathbb{P} \begin{cases} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{cases}$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. **Axiome d'additivité forte** $\mathbb{P}(A_1 + A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{B}^2 \text{ / } A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ on a : } \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé fini**.

Espace probabilisé infini

Considérons $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable infini.

Définition

Probabilité sur un espace probabilisable infini : **Axiomes de Kolmogorov** (1933)

Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} \begin{cases} \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\\ A \mapsto \mathbb{P}(A) \end{cases}$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. **Axiome d'additivité forte** $\mathbb{P}(A_1 + A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$

$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2 \ / \ A_1 \cap A_2 = \emptyset$ on a : $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$

3. **Axiome de continuité monotone**

La limite de la probabilité de toute suite décroissante (pour l'inclusion) vers l'évènement impossible vaut 0,

C'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A_{n+1} \subset A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé infini**.

Il existe une seconde axiomatique équivalente pour définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. Axiome de σ -additivité
$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$$

Pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'évènements de $\mathcal{A}$ incompatibles deux à deux ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$)

on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$$

Propriétés : Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole et $\mathcal{A}$ une σ -algèbre de Boole sur Ω .

- $\forall A \in \mathcal{B}$ (resp. $\forall A \in \mathcal{A}$), $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2$ (resp. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$),
 - * si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ pour $B = \Omega$ alors $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
 - * $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
 - * $\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour toute suite d'évènements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$
- Pour toute suite décroissante (pour l'inclusion) d'évènements de $\mathcal{A}$ vers l'évènement A
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} \subset A_n$, et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = A$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

EQUIPROBABILITE DES EVENEMENTS ELEMENTAIRES

Définition :

On dit qu'il y a **équiprobabilité** des évènements élémentaires si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_j) = \frac{1}{n} \quad \text{où } n = \text{card}(\Omega').$$

Pour $A = \sum_{i=1}^m E_i$ un évènement composé

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_i) = \frac{m}{n}$$

Cas particulier de la tribu totale : $\Omega = \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\text{card } \Omega = \text{card } \Omega' = n$

Pour un évènement élémentaire : $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$

Pour un évènement composé A de cardinal m : $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ nb de cas favorables
nb de cas possibles