

Annexe A : TRANSFORMEES DE LAPLACE

L'analyse temporelle des circuits linéaires en régime transitoire nécessite la résolution d'équations différentielles. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, la transformation de Laplace.

Cette transformation permet d'associer, à toute fonction $f(t)$, une fonction $F(p)$ d'une variable complexe $p=\sigma+j\omega$. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

A.1 - Transformée Directe de Laplace

A.1.1 - Définition de la Transformée de Laplace

Par définition, $f(t)$ étant une fonction réelle du temps (nulle pour $t < 0$), on appelle Transformée de Laplace de cette fonction, notée $\mathcal{L}\{f(t)\}$, la fonction de la variable complexe $F(p)$ telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \text{pour } t \geq 0$$

avec : $f(t) = 0$ pour $t < 0$
 p : complexe indépendant du temps
 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$: transformée de Laplace ou image de $f(t)$
 $f(t)$: originale ou fonction objet de $F(p)$.

A.1.1.a - Exemple 1

La figure A–1 représente la fonction échelon unitaire $u(t)$ ou Heaviside : $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$



Fig. A–1 : Fonction échelon unitaire

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

A.1.1.b - Exemple 2

Soit à calculer $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ connaissant $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$\text{On a : } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$u = f(t)$$

$$dv = e^{-pt} dt$$

$$du = f'(t) dt$$

$$v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$\text{Or : } (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

$$\Rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \left[f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{f(0)}{p} + \frac{1}{p} \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = p F(p) - f(0)$$

Si la condition initiale est nulle ($f(0) = 0$), alors :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p F(p)$$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles ($f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$), alors :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p)$$

Dans ce cas là, l'équation différentielle (pour un système linéaire) liant l'entrée $e(t)$ à la sortie $s(t)$,

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} s(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} s(t) + a_0 s(t) = b_k \frac{d^k}{dt^k} e(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0 e(t)$$

s'écrit, en utilisant la transformée de Laplace, :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_k p^k E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{b_k p^k + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} E(p) \quad \text{avec } S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\}$$

$$\text{et } E(p) = \mathcal{L}\{e(t)\}$$

A.1.2 - Propriétés Usuelles de la transformée de Laplace

A.1.2.a - Linéarité

Si λ_1 et λ_2 sont constants, on a :

$$\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} = \lambda_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \lambda_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$\text{car : } \int_0^{\infty} e^{-pt} \{ \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \} dt = \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt$$

$$\text{en particulier : } \mathcal{L}\{f(t) + j g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + j \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\text{et } \mathcal{L}\{k f(t)\} = k \mathcal{L}\{f(t)\}$$

A.1.2.b - Dérivation

(Voir exemple 1, ci-dessus)

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p F(p) - f(0)$$

$f(0)$ représente la valeur de $f(t)$ lorsque $t \rightarrow 0$ par valeur positive puisque $f(t)$ n'est pas définie pour $t < 0$.

D'une manière générale, on peut écrire :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0) \quad \text{avec } f^{(r-n-1)}(0) = \left. \frac{d^{(r-n-1)} f(t)}{dt^{(r-n-1)}} \right|_{t=0}$$

$$\text{Exemple : } \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} = p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0)$$

A.1.2.c - Intégration

Soit à calculer $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \mathcal{L}\{P(t)\}$, $P(t)$ désignant une primitive de $f(t)$ pour $t > 0$.

$$\text{On a : } \mathcal{L}\{P(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} P(t) dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$u = P(t) \quad dv = e^{-pt} dt$$

$$du = P'(t) dt \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{P(t)\} = \left[P(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} P'(t) dt = \frac{P(0)}{p} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{P(0)}{p}$$

$$\text{En général : } \mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n\right\} = \frac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

en supposant nulles toutes les primitives de $f(t)$ quand $t \rightarrow 0$ par valeurs positives.

A.1.2.d - Changement d'échelle

Un changement de l'échelle des temps se traduit par le changement de la variable " $t \rightarrow kt$ ou $t \rightarrow k/t$ " dans la fonction f . Soit à calculer alors : $\mathcal{L}\{f(kt)\}$ connaissant $\mathcal{L}\{f(t)\}$

On a :
$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(kt) dt$$

Posons : $kt = u \quad \Rightarrow \quad du = k dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{k}$

Donc :
$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-p \frac{u}{k}} f(u) du = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

D'où :
$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

De même que :
$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{1}{k}t\right)\right\} = k F(kp)$$

A.1.3 - Théorèmes relatifs à la Transformée de Laplace

A.1.3.a - Théorème du retard - Translation

Soit à calculer $\mathcal{L}\{f(t - \tau)\}$, c'est-à-dire la transformée de $f(t)$ quand on fait un changement d'origine des temps (Fig. A-2).

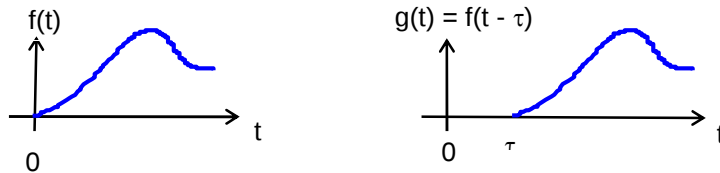


Fig. A-2 : Changement d'origine des temps

On a :
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt \quad \text{pour } t \geq \tau$$

Car, par définition : $f(t) = 0$ pour $t < 0$

ou encore : $f(t - \tau) = g(t) = 0$ pour $t < \tau$

Effectuons le changement de variable $x = t - \tau$:

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(x+\tau)} f(x) dx = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = e^{-p\tau} \mathcal{L}\{f(x)\} = e^{-p\tau} F(p)$$

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{pour } t \geq \tau$$

A.1.3.b - Transformée d'une fonction périodique

Utilisons la propriété précédente pour calculer la transformée de Laplace d'une fonction périodique à partir de $t = 0$.

Considérons une fonction périodique de période T pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$ (Fig. A-3).

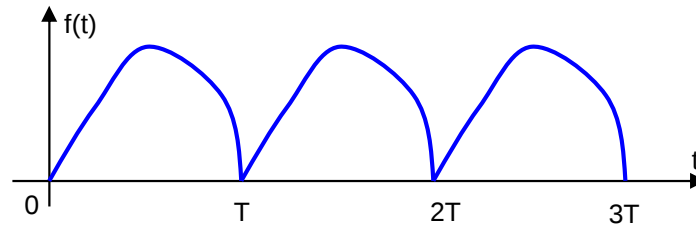


Fig. A-3 : Fonction périodique de période T

La fonction $f(t)$ peut être vue comme une somme de fonctions définies chacune sur une période :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

La fonction $f_1(t)$ se confond avec la fonction $f(t)$ sur la première période $[0, T]$ et est nulle à l'extérieur (Fig. A-4) :

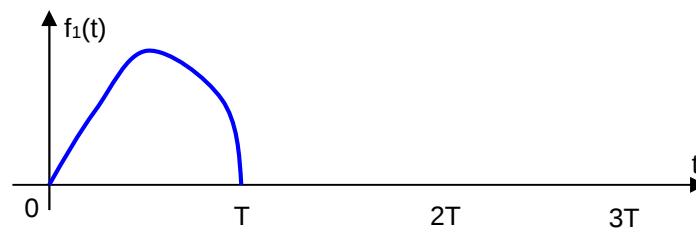


Fig. A-4 : définition de la Fonction $f_1(t)$

La fonction $f_2(t)$ est définie sur la seconde période $[T, 2T]$ (Fig. A-5) :

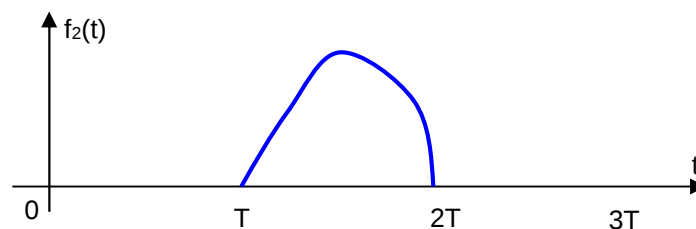


Fig. A-5 : définition de la Fonction $f_2(t)$

Elle se déduit de la fonction $f_1(t)$ par un décalage d'une période :

$$f_2(t) = f_1(t - T)$$

De même pour $f_3(t)$ (Fig. A-6) :

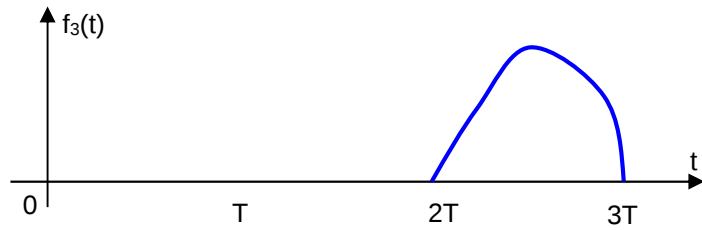


Fig. A-6 : définition de la Fonction $f_3(t)$

$$f_3(t) = f_1(t - 2T)$$

ce qui peut être généraliser à :

$$f_{k+1}(t) = f_1(t - kT)$$

Nous pouvons donc encore écrire :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t - kT)$$

Calculons la transformée de Laplace de cette expression :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - kT)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} F_1(p) \quad \text{où : } F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F_1(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$$

$$\text{car : } \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

A.1.3.c - Théorème de la valeur initiale

Soit à démontrer que : $f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{p F(p)\}$

$$\text{On a : } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = p F(p) - f(0^+)$$

$$\text{quand : } p \rightarrow \infty, \quad e^{-pt} \rightarrow 0, \quad \text{donc } 0 = p F(p) - f(0^+)$$

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{ p F(p) \}$$

A.1.3.d - Théorème de la valeur finale

Soit à démontrer que : $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \{ p F(p) \}$

On a : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = p F(p) - f(0^+)$$

Si $(p \rightarrow 0)$, Alors $(e^{-pt} \rightarrow 1)$. d'où $\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \{ p F(p) - f(0^+) \}$

Or : $\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ f(t) - f(0^+) \}$

Donc : $\lim_{p \rightarrow 0} \{ p F(p) - f(0^+) \} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ f(t) - f(0^+) \}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \{ p F(p) \}$$

Ce résultat n'est valable que si $\{ p F(p) \}$ n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine.

A.1.3.e - Théorème de Duhamel (ou de Borel) - Intégrale de convolution

Soit à démontrer que : $F_1(p).F_2(p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}$

* : produit de convolution

Posons : $f_3(t) = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau).f_2(\tau) d\tau$

Par définition, on a : $\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^{\infty} f_1(t-\tau).f_2(\tau) d\tau dt$

En inversant l'ordre des intégrations, on peut écrire : $\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_0^{\infty} f_2(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_1(t-\tau) e^{-pt} dt$

En posant $u = t - \tau$, il vient :

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_0^{\infty} f_2(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_1(u) e^{-p(u+\tau)} du$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_0^{\infty} f_2(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} f_1(u) e^{-pu} du$$

D'où : $\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_2(p).F_1(p) = F_1(p).F_2(p)$

D'autre part, nous avons : $f_3(t) = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$

Qui peut être écrite : $f_3(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau + \int_t^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$

Et puisque : $f_1(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$

Alors : $f_3(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$

d'où :

$$F_1(p) \cdot F_2(p) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \right\}$$

A.1.3.f - Fonction amortie

Soit $f(t)$ telle que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, quelle est alors $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}$?

On a : $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\alpha+p)t} dt = F(\alpha+p)$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(\alpha+p)$$

A.1.3.g - Multipliation par t

Considérons la dérivée par rapport à p de $f(t)$:

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Comme la variable p n'apparaît que dans l'exponentielle, nous avons :

$$\frac{dF(p)}{dp} = \int_0^{\infty} f(t) \frac{de^{-pt}}{dp} dt = - \int_0^{\infty} \{t \cdot f(t)\} e^{-pt} dt$$

Soit encore :

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = - \frac{dF(p)}{dp}$$

A.2 - Transformée Inverse de Laplace

On peut exprimer la Transformée inverse, en utilisant les intégrales de Fourier et de Melin-Fourrier.

Si $F(p)$ est la Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, on a :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} \cdot F(p) \cdot dp \quad (t \geq 0)$$

où c est une constante, appelée abscisse de convergence.

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- * soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, $F(p)$ est immédiatement reconnaissable dans la table,
- * soit, lorsque la fonction $F(p)$ n'apparaît pas dans la table, décomposer $F(p)$ en fractions partielles et écrire $F(p)$ en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la Transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa Transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Soit $F(p) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$

Si $F(p)$ peut être décomposée en termes distincts : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$

et Si les transformées inverses sont disponibles,

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} &= \mathcal{L}^{-1} \{ F_1(p) \} + \mathcal{L}^{-1} \{ F_2(p) \} + \dots + \mathcal{L}^{-1} \{ F_n(p) \} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \end{aligned}$$

Remarque :

Dans le domaine de la Théorie du contrôle, $F(p)$ est fréquemment mise sous la forme :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{avec } A(p) \text{ et } B(p) \text{ des polynômes en } p,$$

et degré $B(p)$ $\leq$ degré $A(p)$

Cette méthode ne s'applique que si les racines du polynôme du dénominateur sont connues, autrement dit, que si le dénominateur est factorisable :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = K \cdot \frac{(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_m)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_n)}$$

où $p_1, p_2, \dots, p_n$ et $z_1, z_2, \dots, z_m$ peuvent être des quantités réelles ou complexes. Mais pour chaque complexe p ou z , il apparaît un complexe conjugué de p ou z , respectivement.

A.2.1 - Si $F(p)$ ne contient que des pôles distincts

$F(p)$ peut, alors, être décomposée en une somme de fractions partielles :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_2} + \dots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

avec $a_i = \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p+p_i) \right]_{p=-p_i}$ a_i : constante appelée "résidu au pôle $p = p_i$ "

A.2.1.a - Exemple 1

Trouver la Transformée Inverse de $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$ 2 pôles distincts : $p = -1$, $p = -2$

$$F(p) = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} (p+1) \right]_{p=-1} = 2 \\ a_2 = \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} (p+2) \right]_{p=-2} = -1 \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

$$\Rightarrow f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-t}(2 - e^{-t}) \quad t \geq 0$$

Remarque :

Dans le cas où le degré de $B(p) >$ degré de $A(p)$ dans $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

A.2.1.b - Exemple 2

Soit : $G(p) = \frac{p^3 + 5p^2 + 9p + 7}{(p+1)(p+2)}$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient :

$$G(p) = p + 2 + \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = p + 2 + F(p) \quad (\text{voir } F(p) \text{ dans l'exemple précédent})$$

$$\Rightarrow G(p) = p.1 + 2.1 + F(p)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2.\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} \quad t \geq 0$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2.\delta(t) + e^{-t}(2 - e^{-t}) \quad t \geq 0$$

avec $\delta(t)$: impulsion unitaire et $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

A.2.2 - Si $F(p)$ contient des pôles complexes conjugués

Soient p_1 et p_2 les 2 pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p + p_1)(p + p_2)} + \frac{a_3}{p + p_3} + \dots + \frac{a_n}{p + p_n}$$

Avec α_1 et α_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-p_1} = \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_1)(p + p_2) \right]_{p=-p_1 \text{ ou } p=-p_2}$

A.2.2.a - Exemple 1

Trouver la Transformée Inverse de $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2 + p + 1)}$

On a : $p^2 + p + 1 = 0$ pour $p = -0,5 \pm j 0,866$

Donc : $F(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p + 0,5 + j 0,866)(p + 0,5 - j 0,866)} + \frac{a}{p}$

Avec : $(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-0,5-j 0,866} = \left[\frac{p+1}{p} \right]_{p=-0,5-j 0,866}$

$$\alpha_1(-0,5 - j 0,866) + \alpha_2 = \frac{0,5 - j 0,866}{-0,5 - j 0,866}$$

$$\alpha_1(0,25 + j 0,866 - 0,75) + \alpha_2(-0,5 - j 0,866) = 0,5 - j 0,866$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des 2 membres de l'équation précédente, on obtient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \quad \text{d'où :} \quad \alpha_1 = -1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 0$$

Déterminons ensuite la valeur de a :

$$a = [F(p) \cdot p]_{p=0} = \left[\frac{p+1}{p^2 + p + 1} \right]_{p=0} = 1$$

Donc $F(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} + \frac{-p}{p^2 + p + 1} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p}{(p + 0,5 + j 0,866)(p + 0,5 - j 0,866)} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p}{(p + 0,5)^2 + (0,866)^2} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{p + 0,5}{(p + 0,5)^2 + (0,866)^2} + \frac{0,5}{(p + 0,5)^2 + (0,866)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $f(t)$ (voir table des Transformées de Laplace) :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 1 - e^{-0,5t} \cos(0,866 t) + \frac{0,5}{0,866} e^{-0,5t} \sin(0,866 t) \quad (t \geq 0)$$

A.2.3 - Si $F(p)$ contient des pôles multiples

Soit p_1 le pôle multiple de $F(p)$, r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad A(p) = (p + p_1)^r (p + p_{r+1})(p + p_{r+2}) \dots (p + p_n)$$

Alors $F(p)$ s'écrit :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_r}{(p + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(p + p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(p + p_1)} + \frac{a_{r+1}}{p + p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{p + p_{r+2}} + \dots + \frac{a_n}{p + p_n}$$

avec : $a_k = \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_k) \right]_{p=-p_k} \quad (k = r+1, r+2, \dots, n)$

et : $b_r = \frac{1}{0!} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_1)^r \right]_{p=-p_1}$

$$b_{r-1} = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{dp} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_1)^r \right] \right\}_{p=-p_1}$$

⋮

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{dp^j} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_1)^r \right] \right\}_{p=-p_1}$$

⋮

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + p_1)^r \right] \right\}_{p=-p_1}$$

Remarque : $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(p + p_1)^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-p_1 t}$

A.2.3.a - Exemple 1

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)^3} \quad F(p) = \frac{b_3}{(p + 1)^3} + \frac{b_2}{(p + 1)^2} + \frac{b_1}{(p + 1)}$$

$$b_3 = \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + 1)^3 \right]_{p=-1} = [p^2 + 2p + 3]_{p=-1} = 2$$

$$b_2 = \left\{ \frac{d}{dp} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + 1)^3 \right] \right\}_{p=-1} = \left\{ \frac{d}{dp} (p^2 + 2p + 3) \right\}_{p=-1} = (2p + 2)_{p=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{B(p)}{A(p)} (p + 1)^3 \right] \right\}_{p=-1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dp} (2p + 2) \right\}_{p=-1} = \frac{1}{2} (2)_{p=-1} = 1$$

Donc : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(p + 1)^3} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0}{(p + 1)^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(p + 1)} \right] = (t^2 + 1) e^{-t} \quad (t \geq 0)$

Annexe B : Table des Principales Transformées de Laplace et leurs propriétés

Table des Transformées de Laplace	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

(n : entier positif)

Propriétés des Transformées de Laplace	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{2n} p^{2n-r} \cdot \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) \cdot dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$k \cdot F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
$t \cdot f(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$
$f(t)$ fonction périodique de période T. $f_1(t)$ fonction définie sur la 1^{ère} période de $f(t)$. $F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$	
$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{pF(p)\} \qquad f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \{pF(p)\}$ Si les limites existent	