

ESPACES VECTORIELS

Sommaire

I	Espace vectoriel	2
1	Définitions et Propriétés	2
2	Sous-espace vectoriel	2
II	Familles de vecteurs	5
1	Partie/Famille génératrice	5
2	Famille libre - Base	6
III	Somme d'un nombre fini de sous-espaces	8
IV	Exercices	11

I Espace vectoriel

1 Définitions et Propriétés

Définition 1.1 (Espace vectoriel)

Soient E un ensemble non vide et $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (en abrégé $\mathbb{K}$ -ev) si E est muni de deux lois :

- une loi de composition interne $+: E \times E \longrightarrow E$;
- une loi de composition externe $\cdot: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$;

telles que :

- i) $(E, +)$ soit un groupe abélien (ou groupe commutatif) ;
- ii) pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, (x, y) \in E^2$:
 - 1) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributivité de $\cdot$ sur la loi interne) ;
 - 2) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivité de $\cdot$ sur la somme de $\mathbb{K}$) ;
 - 3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (associativité externe de $\cdot$, ou pseudo-associativité) ;
 - 4) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ (compatibilité du neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$).

Définition 1.2 (Groupe abélien (ou groupe commutatif))

Soit E un ensemble non vide.

On dit que $(E, +)$ est un groupe abélien (ou groupe commutatif) si :

- 1) $\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$;
- 2) $\forall x \in E$, il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $0_E + x = x + 0_E = x$;
- 3) tout $x \in E$, admet un symétrique x' tel que $x + x' = 0_E$. Cet élément x' est noté $-x$;
- 4) $\forall x, y \in E, x + y = y + x$.

Remarque

- 1) Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est tout triplet $(E, +, \cdot)$ vérifiant les huit propriétés précédentes.
- 2) Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.
- 3) Dans la suite de ce chapitre, on écrira « αx » au lieu de « $\alpha \cdot x$ ».

Exemple (Exercice d'application)

- 1) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2) Montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2 Sous-espace vectoriel

Il est vite fatigant de vérifier les huit axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Un sous-ensemble F de E est appelé un sous-espace vectoriel de E si :

- i) $0_E \in F$;
- ii) $\forall x, y \in F, x + y \in F$;
- iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

Remarque

- 1) Un sous-espace vectoriel F de E n'est jamais vide puisque $0_E \in F$.
- 2) Les deux sous-ensembles $\{0_E\}$ et E constituent deux sous-espaces vectoriels triviaux de E .

Théorème 1.1 (Caractérisation des sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- i) $0_E \in F$;
- ii) $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \text{ on a : } \alpha x + \beta y \in F$.

La notion de sous-espace vectoriel prend tout son intérêt avec le théorème suivant : un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. C'est ce théorème qui va nous fournir plein d'exemples d'espaces vectoriels.

Théorème 1.2

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est lui-même un espace vectoriel pour les lois induites par E .

Méthodologie : Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F , puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E . Il y a seulement deux ou trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

Remarque

- 1) Si G est un sous-espace vectoriel de F et F est un sous-espace vectoriel de E alors G est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\mathbb{C}_E^F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car $0_E \notin \mathbb{C}_E^F$.

Exemple

- 1) L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :
 - i) On a $0 + 0 = 0$, donc $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \neq \emptyset$;
 - ii) Soit $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de F , et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On a : $\alpha u + \beta v = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$ et $(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = 0$ car $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$. Donc $\alpha u + \beta v \in F$.

2) L'ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ n'appartient pas à G .

Proposition 1.1 (Intersection de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- i) On a $F \subset E$ et $G \subset E$; donc $F \cap G \subset E$.
- ii) $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; donc $0_E \in F \cap G$.
- iii) Soient $x, y \in F \cap G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Comme F et G est un sous-espace vectoriel, alors $\alpha x + \beta y \in F$ et $\alpha x + \beta y \in G$; donc $\alpha x + \beta y \in F \cap G$. ■

Le résultat suivant est une généralisation de la proposition précédente.

Théorème 1.3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E .

Alors l'intersection $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve : On a :

- i) Pour tout $i \in I$, $F_i \subset E$; donc $F = \bigcap_{i \in I} F_i \subset E$.
- ii) $0_E \in F_i$, pour tout $i \in I$ puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E ; donc $0_E \in F$.
- iii) Soient $x, y \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
Pour tout $i \in I$, $\alpha x + \beta y \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E ; donc $\alpha x + \beta y \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$. ■

D'où $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espaces vectoriels de E . ■

Exemple

- 1) Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.
On montre que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ égale à l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, F et G définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
- 2) Soient $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Alors $F_1 \cap F_3 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi $F_1 \cap F_3 = \mathbb{R}e_2$ avec $e_2 = (0, 1, 0)$.
- 3) Si u et v désignent deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ alors $\mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Remarque

- 1) L'intersection de sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace-vectoriel E n'est jamais vide : elle contient au moins le vecteur nul, c'est-à-dire $0_E \in F \cap G$.

2) Considérons les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x_1) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Alors, l'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(1, 0) \in F_1$ et $(0, 1) \in F_2$ mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

II Familles de vecteurs

1 Partie/Famille génératrice

Définition 1.4

Soient $v_1, v_2, \dots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E .

Tout vecteur v de la forme $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire

Définition 1.5 (Partie/famille génératrice)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E .

- i) On dit que la partie X est génératrice de E ou engendre E si tout élément de E est combinaison linéaire de X ; on note $E = \text{Vect}(X)$.
- ii) Si $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on dit aussi que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de E ou engendre E . Autrement dit,

$$E = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_n v_n / (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Remarque

- 1) $\text{Vect}\{0_E\} = \{0_E\}$.
- 2) Le sous-espace engendré par une famille de vecteurs ne change pas lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs. Par exemple $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3, v_1\}$.
- 3) Si le vecteur v_{n+1} est combinaison linéaire des n vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$, alors $\text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. En particulier $\text{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n, 0_E\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Exemple

- 1) Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs suivants : $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 0)$, $v_3 = (3, 5, 2, -1)$.
On a : $v_3 = v_1 + 2v_2$. D'où $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$.
- 2) Considérons dans $\mathbb{C}^4$ les trois vecteurs suivants : $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2i, 6)$, $v_3 = (1, i, 0, 1 + 3i)$.
On a : $v_3 = v_1 + \frac{i}{2}v_2$. D'où $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$.

Remarque

- 1) On ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on multiplie un des vecteurs par un scalaire non nul.
- 2) On ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on additionne à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple (Attention)

Considérons deux vecteurs v_1 et v_2 d'un $\mathbb{K}$ -espace E . Supposons que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Alors on a :

- $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{v_1, v_2 - v_1\} = \text{Vect}\{v_1 - v_2, v_2\}$;
 - $\text{Vect}\{v_1, v_2\} \neq \text{Vect}\{v_1 - v_2, v_2 - v_1\} = \text{Vect}\{v_1 - v_2\} = \mathbb{K}\{v_1 - v_2\}$.
- En effet, ni v_1 , ni v_2 n'appartient à la droite vectorielle $\mathbb{K}(v_1 - v_2)$.

Exemple

L'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1)\}$. En effet, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + 2y \\ t = -x + y \end{cases}$$

Ainsi

$$E = \{(x, y, x + 2y, -x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1, -1) + y(0, 1, 2, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1)\}$$

Ceci montre à la fois que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1)\}$ engendre E .

2 Famille libre - Base

Définition 1.6 (Famille libre - Famille liée)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de vecteurs de E . On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre ou que les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ sont linéairement indépendants, si pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, alors on dit qu'elle est liée.

Exemple

- 1) Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, 0)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

Étudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Après résolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

- 2) Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, -1, 1)$, $w = (0, 1, 1)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

Étudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Après résolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = -\beta \end{cases}$

On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est liée car on a notamment la relation linéaire $-2u + v - w = 0$.

Définition 1.7 (Base)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E .

- i) On dit que la famille $\mathcal{B}$ est une base de E , si $\mathcal{B}$ est à la fois une famille libre dans E et une famille génératrice de E .
- ii) Le cardinal de la base de E est appelé la dimension de E et noté $\dim E$.

Remarque

- 1) Un espace vectoriel E est de dimension finie si $\dim E \in \mathbb{N}$.
- 2) Tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases.
- 3) Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.

Définition 1.8 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

- 1) La famille $\mathcal{B} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E si et seulement si tout élément v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des éléments v_i :

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

- 2) L'existence traduit le caractère générateur, l'unicité traduit la liberté. Les coefficients λ_i de cette combinaison linéaire sont appelés coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

Le choix d'une base de E permet donc de définir un système de coordonnées : la donnée d'un vecteur v équivaut à la donnée de ses coordonnées dans une base fixée.

Exemple (Exercice d'application)

- 1) Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer sa base.
- 2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base et la dimension.

Définition 1.9 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E . Le rang de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est la dimension de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ (cet espace est de dimension finie, puisque engendré par une famille finie).

On note : $\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

Exemple (Exercice d'application)

Etudier chacune des familles suivantes puis déterminer leur rang.

- 1) $\mathcal{F}_1 = (u, v, w)$ où $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
- 2) $\mathcal{F}_2 = (u, v, w)$ où $u = (2, 1, 7)$, $v = (1, 1, 2)$ et $w = (1, 2, -1)$.

Théorème 1.4 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- i) Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E , et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E par ajout de vecteurs de $\mathcal{G}$.
- ii) Toute famille libre peut être complétée en une base.

Remarque

Le théorème de la base incomplète, affirme que toute famille libre peut être vue comme le début d'une base.

III Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas en général un sous-espace vectoriel, il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois les deux sous-espaces vectoriels F et G , et en particulier le plus petit d'entre eux (au sens de l'inclusion).

Définition 1.10 (Somme de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On appelle somme des sous-espaces vectoriels F et G de E , le sous-espace vectoriel de E , noté $F + G$, engendré par leur réunion $F \cup G$. C'est l'ensemble de tous les éléments $x + y$, où x est un élément de F et y un élément de G .

$$F + G \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x + y \mid x \in F, y \in G\} = \text{Vect}(F \cup G).$$

Proposition 1.2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- i) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- ii) $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G .

Preuve: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

i) Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$; donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
- Soient x et x' des éléments de $F + G$.
Comme x est dans $F + G$, il existe y dans F et z dans G tels que $x = y + z$.
Comme x' est dans $F + G$, il existe y' dans F et z' dans G tels que $x' = y' + z'$.
Alors $x + x' = (y + z) + (y' + z') = (y + y') + (z + z') \in F + G$, car $y + y' \in F$ et $z + z' \in G$.
- Soit x un élément de $F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe y dans F et z dans G tels que $x = y + z$. Alors $\lambda x = \lambda(y + z) = (\lambda y) + (\lambda z) \in F + G$, car $\lambda y \in F$ et $\lambda z \in G$.

ii) Montrons que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G .

- L'ensemble $F + G$ contient F et contient G : en effet tout élément y de F s'écrit $y = y + 0$ avec $y \in F$ et $0 \in G$ (puisque G est un sous-espace vectoriel); donc y appartient à $F + G$. De même pour un élément de G .
- Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G , alors montrons que $F + G \subset H$.
C'est clair que si $y \in F$ alors en particulier $y \in H$ (car $F \subset H$); de même si $z \in G$ alors $z \in H$.
Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $y + z \in H$. ■

Proposition 1.3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F des sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $F = E_1 + E_2 + \dots + E_n$;
- $F = ((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1} + E_n$;
- $F = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n\}$.

Définition 1.11 (Somme directe de sous-espaces / Sous-espaces supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe dans E , ou sont supplémentaires dans E , si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$. On note alors $F \oplus G = E$.

Proposition 1.4

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Preuve: • Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique.
Soient $x = y + z$ et $x = y' + z'$ avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. On a alors $y + z = y' + z'$, donc $y - y' = z - z'$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors $y - y' \in F$; mais d'autre part G est aussi un sous-espace vectoriel donc $z - z' \in G$. Conclusion : $y - y' = z - z' \in F \cap G$. Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \cap G = \{0_E\}$, donc $y - y' = 0_E$ et aussi $z - z' = 0_E$. On en déduit $y = y'$ et $z = z'$; ce qu'il fallait démontrer.

- Supposons que tout $x \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.
— Montrons $F \cap G = \{0_E\}$. Si $x \in F \cap G$, il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $x = 0_E + x$ et $x = x + 0_E$. Par l'unicité de la décomposition, $x = 0_E$.

- Montrons $F + G = E$. Il n'y a rien à prouver, car par hypothèse tout élément x se décompose en $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. ■

Définition 1.12

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . La somme $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ est directe si $E_1 \oplus E_2, (E_1 + E_2) \oplus E_3, ((E_1 + E_2) + E_3) \oplus E_4, \dots, (((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1}) \oplus E_n$. On note $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$.

Théorème 1.5 (Formule de Grassmann)

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de dimension finie de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Exemple (Exercice d'application)

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$.

Considérons $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

Quelles sont les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$?

Proposition 1.5

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n, F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\forall i, F_i \subset E_i$. Alors, si $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ est directe, il en est de même de $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

Théorème 1.6 (Dimension d'une somme directe)

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E en somme directe. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie, et $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Théorème 1.7 (Dimension d'une somme de n espaces)

Soient E un espace vectoriel et $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E .

- i) Alors on a : $\dim(E_1 + E_2 + \dots + E_n) \leq \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_n$.
- ii) Si de plus $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont en somme directe, alors $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ est de dimension finie et $\dim(E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_n$.

Proposition 1.6 (Dimension d'un produit cartésien)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont de dimension finie, l'espace vectoriel produit $E \times F$ est de dimension finie, égale à :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Plus précisément, si $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ sont des bases de E et F , alors une base de $E \times F$ est $((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_m, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_n))$.

IV Exercices

Exercice 1.1

- 1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base puis la dimension de $\mathcal{F}_1$.
- 2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$. Déterminer une base puis la dimension de $\mathcal{F}_2$.

Exercice 1.2

Dans un espace vectoriel E de dimension 6, on considère deux sous-espaces F et G avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Que peut-on dire de $F \cap G$? de $F + G$? Peut-on avoir $F \oplus G = E$?

Exercice 1.3

- 1) Soient $u(1, 1, 4), v(1, 3, t), w(1, 1, t), t \in \mathbb{R}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de t les vecteurs (u, v, w) suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants : $F = \{^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ où $u = ^t(1, 1, 1)$ et $v = ^t(2, 1, -1)$.
Est-ce que $F = G$? Justifier.