

TRAVAUX DIRIGES SEMESTRE 3

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2025 - 2026

Exercice 1

Répondre par **Vrai** au **Faux** aux affirmations suivantes :

- $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}} dx$ converge
- $I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^r} dx$ converge pour $r < 2$
- $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}} dx$ converge
- $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$ diverge
- $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{x}} dx$ diverge
- $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}} dx$ converge
- $I = \int_0^{+\infty} \frac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x^3}} dx$ diverge

Exercice 2

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx$

- Montrer que l'intégrale I est convergente.
- Calculer I .
- Reprendre le travail avec J .

Exercice 3

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer leur valeur :

- $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
- $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$
- $\int_0^{+\infty} 1 dt$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$

$$6. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

Exercice 4

- Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

Calculer $F(x)$.

- En déduire que l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

Est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5

Soient I_1 et I_2 définies par :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 8t^2 + 19t + 12}$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 3t^2 + 3t + 2}$$

- (a) Étudier la convergence de I_1 .
 (b) Montre que -1 est une racine de $f(t) = \frac{dt}{t^3 + 8t^2 + 19t + 12}$.
 (c) Calculer I_1 .

- Reprenez le travail pour I_2 .

Exercice 6

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

- $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$
- $\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$
- $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$$

$$8. \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Exercice 7

- Calculer

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$.

- Montrer avec les règles de Riemann que

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

converge.

- Calculer I

Exercice 8

Calculer les intégrales généralisées suivantes, en montrant leur convergence :

- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$
- $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+ax+b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2-4b < 0$
- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$