

Devoir de MTH 305 : Initiation la modélisation mathématique
Fait le 28 Juin 2014 - Durée : 2 h

EXERCICE I : Étude de l'équilibre par le critère de Routh-Hurwitz

On considère le système dynamique suivant constitué de proie, de prédateur, de super prédateur et de super super prédateur :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(r - ay) \\ \dot{y} &= y(-m + bx - cz) \\ \dot{z} &= z(-n + dy - fk) \\ \dot{k} &= sk \left(1 - \frac{k}{K}\right) + gzk,\end{aligned}$$

où r est le taux de croissance des proies et m le taux de mortalité des prédateurs. Les constantes a, b, c, d, f, g, s et K sont positives.

1. Déterminer l'unique état d'équilibre non trivial de ce système dynamique. On suppose qu'il appartient au cadran positif.
2. Calculer la matrice Jacobienne en ce point d'équilibre.
3. Calculer l'équation caractéristique de la matrice Jacobienne. Elle peut se mettre sous la forme :

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

4. Utiliser le critère de Routh-Hurwitz pour prédire la coexistence de ce système. (On pourra montrer que $a_3(a_1a_2 - a_3) > (a_1)^2a_4$)

EXERCICE II : Étude du modèle proie-prédateur de Beddington

Le modèle proie-prédateur de Beddington, en supposant une croissance linéaire, s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - \frac{axy}{1 + bx + cy}, \\ \dot{y} &= -my + e \frac{axy}{1 + bx + cy},\end{aligned}$$

où r est le taux de croissance des proies et m le taux de mortalité des prédateurs. Les constantes a, b et c sont positives.

1. Déterminer les points d'équilibre de cette dynamique de population.
2. On pose

$$\alpha = \frac{ea}{mc}; \quad \beta = \frac{rb}{a - rc} + \frac{b}{c}.$$

Montrer que l'équilibre non trivial appartient au cadran positif en établissant une relation entre α et β .

3. Quelle est la stabilité de l'origine ?
4. On suppose que l'équilibre non trivial appartient au cadran positif.

- (a) Montrer que la matrice jacobienne en ce point est :

$$A(x^*, y^*) = \frac{1}{(1 + bx^* + cy^*)^2} \begin{pmatrix} aby^*x^* & -ax^*(1 + bx^*) \\ eay^*(1 + cy^*) & -eacy^*x^* \end{pmatrix}.$$

- (b) Étudier la stabilité de ce point d'équilibre.
(c) Dans le cas où ce point est un centre (i.e. $b = ec$), déterminer une intégrale première vous permettant de préciser sa stabilité.

EXERCICE III : Étude du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Le modèle simple de Lotka-Volterra est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - axy, \\ \dot{y} &= -my + eaxy,\end{aligned}$$

où r est le taux de croissance des proies et m le taux de mortalité des prédateurs. Les constantes a , b et e sont positives.

1. Déterminer les deux points d'équilibre de ce système.
2. Montrer que le point d'équilibre non trivial est un centre.
3. On se propose de déterminer le portrait de phase de l'équilibre non trivial.
 - (a) Déterminer une intégrale première du système dynamique.
 - (b) Montrer que cette intégrale première présente un minimum au voisinage du point d'équilibre.
 - (c) En déduire le portrait de phase de cet équilibre.