

Examen du Semestre Mousson
Épreuve : MTH 337 (Équations Différentielles)
Option : Maths, Semestre 6
Durée : 2 heures

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy pour l'équation de mouvement uniforme d'un point matériel P de masse m de la position $M_0(x_0)$ à $M(x)$ suivant :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \\ x(0) = x_0; \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \end{cases} \quad (1)$$

x_0 -position initiale et v_0 -vitesse initiale. $x = x(t)$ est la distance entre M_0 et M .
En intégrant cette équation on obtient la relation

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (2)$$

- 1) Que représente chacun des termes du premier membre de (2)
- 2) Donner une interprétation de l'égalité (2)

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$
- 2) $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$; $y''(1) = 2$
- 3) $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$ (choix de solutions particulières)

Exercice 3

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases} \quad x(0) = -2; \quad y(0) = 1$
- 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y + t \\ \frac{dz}{dt} = x - t \end{cases}$

TD 3 : Equations différentielles

Exercice 1 : Equations différentielles du premier ordre

- Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant d'abord une solution évidente
 $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$, $y' - 2xy = \sinh(x) - 2x\cosh(x)$, $y' + y \sin(x) = \sin(2x)$, $y' \cos^2(x) - y = e^{\tan(x)}$
- Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles que l'on précisera. Recoller les solutions aux points critiques.
 $x^2 y' - y = (x^2 - 1)e^x$, $xy' - 2y = x^3$, $xy' + y = \arctan(x)$
- Soit l'équation différentielle :
 $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$
 a) Trouver une solution polynomiale.
 b) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$
 c) Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$
- Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $x^2 y' + y = x^2$
On fera apparaître une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.
 Déterminer une solution prolongeable par continuité en 0.
- Résoudre l'équation différentielle : $x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0$
 Etudier les raccordements possibles des solutions en 0 et 1.

Exercice 2 : Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

- Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales données :
 a) $y'' + 9y = x^2$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$
 b) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ $y(1) = 0$ $y'(1) = 0$
 c) $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{x}{2}}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
 d) $y'' - 2y' + 2y = \sin(x)e^x$ $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
- Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$
- Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2\alpha y' + y = e^x$
 en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α .

Exercice 3 : Equations de Bernoulli et de Riccati

- Equations de Bernoulli
 a) $y' - 3\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} = 0$
 b) $y' - \frac{y}{x} - \frac{1}{y} = 0$
 c) $y'\sqrt{x} - y + (x+2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$
 d) $y' - y - x^2 y^2 = 0$
 e) $x^2 y' - xy + y^2 = 0$
 f) $2xy' + y - 2x^2 y^{-3} = 0$
- Equations de Riccati
 a) $y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 - \frac{1}{x})y + x + 2$, $y = x$ est une solution particulière.
 b) $x^2 y' = 1 - xy - x^2 y^2$, $y = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.
 c) $2x^2 y' + x^2 y' + 1 = 0$
 d) $(x^2 + 1)y' - y^2 + 1 = 0$
 e) $y'' - 1 = 0$

Devoir du Semestre Mousson
Epreuve : MTH 337
Durée : 2H

Exercices 1

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $y' = \tan x \tan y$ ✓

2. $x y' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ ✓✓

3. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + xc^2)dy = 0, \quad y(0) = 0$?

4. $(x^3 \ln y - x)y' = y$

5. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^3$ ✓

6. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y^2}$

Exercices 2

Utiliser la méthode de choix d'une solution particulière pour résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$ ✓

2. $y'' + 9y = 2 \sin x \sin 2x, \quad y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$

3. $y'' - 2y' + 2y = x^3$ ✓

4. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y_0 = 0$ est une solution particulière.

Exercices 3

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

UNIVERSITE DE LOME
MATH-SEM6

ANNEE UNIVERSITAIRE
2013-2014

Examen du Semestre Mousson
Epreuve : MTH 337
Durée : 2H

Exercices 1

1. Utiliser les approximations de Picard pour résoudre le problème de Cauchy suivant $z' = z$, $z(0) = 0$.
2. Etant donné le problème $z' = v(z, t)$, $z(t_0) = z_0$, démontrer l'existence de sa solution. L'unicité n'est pas nécessaire.

Exercices 2

Résoudre les équations différentielles

1. $y' + \frac{1}{x}y = -xy^2$; ✓

2. $(x^2y^2 - 1)dx + 2x^2ydy = 0$; ② méthode ✓

3. $y'' + 4y = 12 \cos 2x$, choix d'une solution particulière.

4. $y' + y = \frac{2-x}{x^2}e^x$, méthode de variation des constantes.

UNIVERSITE DE LOME
MATH-SM4

ANNEE UNIVERSITAIRE
2012-2013

Deuxième Semestre
Epreuve : MTH 337 (Equations Différentielles)
Durée : 2H

Exercices 1

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $y' \sin^2 z + y = e^{\cos z}$

2. $xy' + y = \frac{1}{1+x}$ ✓

3. $\sqrt{1+y^2} dx = xy dy$ ✓

4. $(x^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0, y(0) = 1$

Exercices 2

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $3y'' = 4yy' + y^2$

2. $y'' - y = 3e^{2z} \cos z$

3. $y'' - 6y = 2e^{2x}$ / $y^{(4)} + y - 6y = 2e^{2x}$

N.B : 2) et 3), choix d'une solution particulière

Devoir Surveillé

Épreuve : MTH 337 (Équations Différentielles)

Option : Maths, Semestre 6

Durée : 2 heures

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $y' + y \tan x = \sec(x)$
2. $xy' + y = y^2 \ln x$
3. $y = y'^2 + xy'^2$
4. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$; condition initiale $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles d'ordre supérieur suivantes :

1. $y^{(4)} = \cos^2 x$; $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$
 2. $y'' = \sin(kx)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 3. $y^{(5)} + 6y''' + 9y' = 0$
 4. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ (choix d'une solution particulière) .
 5. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$
-

Examen de MTH 337

Durée : 2 heures

Exercice 1

D'après la loi de Newton la vitesse de refroidissement d'un corps placé dans l'air est proportionnelle à la différence entre la température T du corps et la température T_0 de l'air ambiant.

Sachant que la température de l'air est égale à 20°C et que durant 20mn le corps se refroidit de 100°C à 60°C , calculer le temps au bout duquel la température du corps s'abaissera à 30°C .

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$

2. $x^2y' - \cos 2y = 0, \quad y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}$

3. $y' + y \tan x = \sec x$

Exercice 3

Utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Exercice 4

Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} t \frac{dx}{dt} = -x + yt \\ t^2 \frac{dy}{dt} = -2x + yt \end{cases}$$

EXAMEN DU SEMESTRE MOUSSON
ÉPREUVE MTH 337-Équations Différentielles
DURÉE: 2 heures

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes

1. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

2. $\sqrt{y^2 + 1}dx - xydy = 0$

3. $xy' + y = e^x, y(1) = 1$

4. $(\sin^2 y + x \cot y)y' = 1$

Exercice 2 Au bout de 20 minutes, la température d'un corps passe de 100°C à 60°C , tandis que la température du milieu est 20°C .

1. Trouver la loi de refroidissement du corps.

2. En combien de minutes sa température tombera-t-elle à 30°C ?

Exercice 3 Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants.

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - y - z = 0 \\ -x + \frac{dy}{dt} - z = 0 \\ -x - y + \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4y_2 \end{cases} \quad \checkmark$$

Exercice 4 1. Utiliser les approximations de Picard pour résoudre le problème de Cauchy suivant

$$x' = x, x(0) = 0.$$

2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 2\lg x.$$