

INTÉGRALES MULTIPLES

Sommaire

1.1	Intégrales doubles	2
1.2	Intégrale curviligne	5
1.3	Intégrales triples	6
1.3.1	Le théorème de Fubini	6
1.3.2	Le changement de variables	7
1.4	Exercices	7

1.1 Intégrales doubles

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$, ($a < b$ et $c < d$) un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [a, b]$ fixé, la fonction $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_x(y) = f(x, y)$ est intégrable sur $[c, d]$. Le nombre $\int_c^d f_x(t) dt$ dépend de x . On a donc une fonction $\mathcal{A} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{A}(x) = \int_c^d f(x, t) dt$. En intégrant la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[a, b]$, on a la formule

$$\int_a^b \mathcal{A}(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Dans l'expression $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$, l'on dit que l'on intègre d'abord par rapport à y , et ensuite par rapport à x .

De manière analogue, dans l'expression $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$, l'on dit que l'on intègre d'abord par rapport à x , puis par rapport à y .

Définition 1.1

Soient a, b, c et d quatre réels et D le domaine défini par $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur D . L'intégrale double de f sur D , noté $\int \int_D f(x, y) dx dy$, est le nombre réel défini par :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple (Exercice d'application)

Considérons le rectangle $D = [1, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$ et la fonction f définie par $f(x, y) = xy + y^2 + 1$. Calculer de deux manières différentes, l'intégrale double $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Théorème 1.1 (Théorème de Fubini pour les rectangles fermés)

Soient $D = [a, b] \times [c, d]$ ($a \leq b$ et $c \leq d$) un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur D et on a :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple (Exercice d'application)

Soit $D = [0, 1] \times [1, 2]$ et

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

- 1) Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$ en intégrant f d'abord en x , puis en y .
- 2) Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$ en intégrant f d'abord en y , puis en x .

3) Que peut-on conclure ?

Exemple (Exercice d'application)

1) Considérons le rectangle $D = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ et la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{xy}$.

Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

2) Soient $D = [0, 1] \times [0, 2]$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Remarque

Il faut retenir que dans l'application du **Théorème de Fubini (Théorème 1.1)**, un choix judicieux de l'ordre d'intégration s'impose.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. On définit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$.

Soient c et d deux réels tels que $c \leq d$ et ψ_1 et ψ_2 deux fonctions définies et continue sur $[c, d]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall y \in [c, d], \psi_1(y) \leq \psi_2(y)$. On définit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

Théorème 1.2 (Théorème Fubini)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que l'on puisse définir D des deux façons suivantes : $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x, y) / c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction continue sur D . On a :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Exemple (Exercice d'application)

1) Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq x\}$ et $f(x, y) = x^2 y$. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

2) Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ compris entre les droites d'équations $x = 1$, $x = 4$ et les deux paraboles d'équations respectives $y = (x - 2)^2 - 4$, $y = -(x - 3)^2 + 4$. On considère sur D la fonction f définie par $f(x, y) = 3x - 2y + 1$. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Proposition 1.1

Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x, y) = g(x)h(y)$ où g et h sont continues sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement. Alors l'intégrale double sur le domaine $D =$

$[a, b] \times [c, d]$ est le produit de deux intégrales simples : $\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$

Exemple (Exercice d'application)

Soient $D = [0, \ln 2] \times [0, 1]$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = e^{x+y}$. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Théorème 1.3 (Changement de variables)

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe C^1 , $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$; alors :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

Remarque

Le déterminant $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$ est le jacobien du changement de variable.

Proposition 1.2 (Passage en coordonnées polaires)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction continue sur D .

Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que l'application $\xi : \Delta \rightarrow D$
 $(\rho, \theta) \mapsto (x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta)$
 soit bijective. On a :

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\rho| d\rho d\theta$$

Remarque

L'élément $|\rho|$ rajouté dans l'intégrale est la valeur absolue du jacobien au point (ρ, θ) de l'application ξ .

Exemple (Exercice d'application)

Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Solution :

- On exprime f en coordonnées polaires en posant $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$:

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho \cos \theta \times \rho \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta).$$
- On exprime le domaine D en fonction de ρ et θ :
 - * Les conditions $x > 0$ et $y > 0$ signifient que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - * $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ équivaut à $1 \leq \rho \leq 2$
 Donc $\Delta = \{(\rho, \theta) / \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } 1 \leq \rho \leq 2\}$.

- On passe en coordonnées polaire dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x,y) dx dy &= \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) |\rho| d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} \sin(2\theta) \rho^2 \right]_1^2 d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \sin(2\theta) d\theta = \left[-\frac{3}{8} \cos(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

1.2 Intégrale curviligne

Lorsqu'on déplace un point matériel dans un champ de force, le travail mécanique fournit par le champ de force est donné par une intégrale curviligne le long de la trajectoire.

Définition 1.2 (Arc orienté)

Soit Γ un arc de courbe défini par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$.

L'arc est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possibles, ce qui revient à distinguer les vecteurs unitaires tangents (opposés) $\vec{T}_+$ et $\vec{T}_-$.

Définition 1.3 (Arc orienté)

Soient P , Q et R des fonctions continues.

On appelle intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ le nombre noté

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_{\Gamma^+} (Pdx + Qdy) \text{ et défini par : } I = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Proposition 1.3 (Cas d'une forme exacte)

Si $\omega = df$, alors $\int_{AB} \omega = f(B) - f(A)$ ne dépend que des extrémités du chemin d'intégration. L'intégrale est donc nulle si la courbe est fermée.

Théorème 1.4 (Formule de Green-Riemann)

Soit D une partie fermée bornée du plan limitée par un bord Γ de classe C^1 par morceaux, et P et Q des fonctions C^1 dans D . On a :

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

où le symbole Γ^+ désigne le bord Γ , orienté de sorte qu'un mobile parcourant Γ a toujours D à sa gauche.

Remarque (Application aux formes différentielles exactes)

La forme différentielle $Pdx + Qdy$ est exacte dans D si, et seulement si, son intégrale sur toute courbe fermée contenue dans D est nulle.

Exemple (Exercice d'application)

Soient deux points $A(2;0)$, $B(-2;0)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons deux chemins, Γ_1 le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et Γ_2 le segment $[AB]$; ces deux chemins sont parcourus de A vers B . Notons S la surface délimitée par Γ_1 et Γ_2 .

Soient $A = \int_{\Gamma_1} 4dx + xydy$, $B = \int_{\Gamma_2} 4dx + xydy$ et $C = \int \int_S ydxdy$.

1) Calculer directement A , B et C .

2) Démontrer que $A = B + C$. On pourra appliquer la formule de Green-Riemann à C .

Solution :

1) Calculons directement A , B et C :

Γ_1 est le demi-cercle supérieur. Par passage en coordonnée polaires, on a :

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\cos(t) \\ y = y(t) = 2\sin(t), t \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) \\ y'(t) = 2\cos(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_2 \text{ est le segment } [AB]. \text{ Posons : } \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = 0, t \in [-2, 2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\bullet A = \int_{\Gamma_1} 4dx + xydy = 8 \int_0^\pi [-\sin(t) + (\cos^2(t))\sin(t)] dt = 8 \left[\cos(t) - \frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^\pi = -\frac{32}{3}.$$

$$\bullet B = \int_{\Gamma_2} 4dx + xydy = -16.$$

$$\bullet \text{ En passant en coordonnées polaires : } C = \int \int_S ydxdy = \int_0^2 \int_0^\pi (r^2 \sin(t) dt) r dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

2) Démontrons que $A = B + C$.

Posons $A(x, y) = 4dx + xydy = Pdx + Qdy$; on a : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$.

La formule de Green-Riemann donne :

$$\begin{aligned} C &= \int \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int \int_S ydxdy \\ &= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} 4dx + xydy \\ C &= \int_{\Gamma_1} (4dx + xydy) - \int_{\Gamma_2} (4dx + xydy) = A - B, \text{ d'après Chasles.} \end{aligned}$$

1.3 Intégrales triples

1.3.1 Le théorème de Fubini

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- Si Ω est un parallélépipède, alors $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ et $\iiint_{\Omega} = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz$; on intègre dans l'ordre qu'on veut.
- Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors $\Omega = \{(x, y, z) / x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)], z \in [e(x, y), g(x, y)]\}$ et $\iiint_{\Omega} = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z) dz$; l'ordre d'intégration est forcé.

Exemple (Exercice d'application)

- 1) Soit $\Omega = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3] \subset \mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$.
Calculer $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.
- 2) Soit Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1\}$,
et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = 1 - 2yz$.
Calculer $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$.

1.3.2 Le changement de variables

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques : $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$.

Exemple (Exercice d'application)

Considérons $\iiint_{\Omega} (1 - 2yz) dx dy dz$ où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$.

1.4 Exercices**Exercice 1.1**

- On considère la forme différentielle de degré 1 définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ par : $\omega = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$.
- 1) Montrer que ω est fermée sur U .
 - 2) Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.
 - 3) Calculer $\int_{(C)} \omega$, où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A = (1; 2)$ et d'extrémité $B = (3; 8)$.

Solution :

- 1) En posant $P(x, y) = \frac{2x}{y}$ et $Q(x, y) = -\frac{x^2}{y^2}$, on a : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2}$.
- 2) a) La forme différentielle est fermée, et l'ouvert U est étoilé. D'après le théorème de Poincaré, la forme différentielle est exacte.
b) On peut aussi prouver qu'elle est exacte en calculant ses primitives, i.e. en recherchant f telle que : $\omega = df$. On doit alors résoudre : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$.
La première équation donne : $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + H(y)$, et on introduit dans la seconde pour obtenir : $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + H'(y) = -\frac{x^2}{y^2}$.
On a donc $H(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, et on vérifie aisément que $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ est une primitive de ω : ω est exacte.
- 3) Le calcul ne dépend pas du chemin choisi, mais uniquement des extrémités pour une forme différentielle exacte. On trouve : $\int_C \omega = f(3, 8) - f(1, 2) = \frac{9}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

Exercice 1.2

Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$.

- 1) Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
- 2) En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, de $A(1, 2)$ vers $B(3, 4)$.

Exercice 1.3

- 1) Trouver une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant $\varphi(0) = -1$ telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur $\mathbb{R}^2$: $\omega(x, y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy$.
- 2) Donner alors une primitive de ω .
- 3) En déduire $\int_C \omega$ pour l'ellipse d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$, orientée dans le sens direct.

Exercice 1.4

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $\int_{\Gamma} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, où Γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $x = y^2$.

Solution

Le domaine correspondant a pour paramétrage : $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
On pose $P(x, y) = 2xy - x^2$ et $Q(x, y) = x + y^2$. On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3) dx \\ I &= \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Exercice 1.5

Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ avec $P(x, y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y}$ et $Q(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}$.

- 1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$, ω est une forme différentielle totale.
- 2) Déterminer u dans D , telle que $du = \omega$.
- 3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par : $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.