

Synthèse du Semestre Harmattan
Parcours : Licence ST Mathématiques
UE de MTH222 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Durée : 2H

Exercice 1(6pts)

Soit E un ensemble.

1. Énoncez les trois axiomes qui définissent une topologie $\mathcal{T}$ sur E .
2. Montrer qu'une partie A d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $(E, \mathcal{T})$. Montrer que $\mathcal{F}$ possède les propriétés suivantes :
 - (a) $\phi \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$
 - (b) $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, A \cup B \in \mathcal{F}$
 - (c) $\forall I, \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

1. Les trois axiomes qui définissent une topologie sur E : (0,5pt $\times$ 3)

- i) $\phi \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$ ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \cap B \in \mathcal{T}$ iii) $\forall I, \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

2. Une partie A d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.

Démonstration : Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E .

i) Supposons A ouvert.

Alors pour tout point a de A , on a $\{a\} \subset A \subset A$, donc A est voisinage de chacun de ses points. (1pt)

ii) Réciproquement, supposons que A est voisinage de chacun de ses points.

$\forall a \in A, \exists U_a \in \mathcal{T}$ tel que $\{a\} \subset U_a \subset A$. Or par construction, $A \subset \cup_{a \in A} U_a$. Et puisque $\cup_{a \in A} U_a \subset A$, on a $A = \cup_{a \in A} U_a$.

Donc A appartient à $\mathcal{T}$, d'après la propriété iii) définissant la topologie $\mathcal{T}$. (1,5pt)

3. $\mathcal{F}$ possède les propriétés (a), (b) et (c)

(a) ϕ et E sont des fermés car leurs complémentaires respectifs, E et ϕ sont des ouverts. (0,5 pt)

(b) Soit $(A, B) \in \mathcal{F}^2$. il existe $(A', B') \in \mathcal{T}^2$ tels que $A = \complement_E A'$ et $B = \complement_E B'$.

Alors $A \cup B = (\complement_E A') \cup (\complement_E B') = \complement_E (A' \cap B')$. Par suite, $A \cup B$ est un fermé puisque $A' \cap B'$ est un ouvert. (0,5pt)

(c) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de $\mathcal{F}$. Il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $\mathcal{T}$ telle que $\forall i \in I, A_i = \complement_E U_i$.

Alors $\cap_{i \in I} A_i = \cap_{i \in I} (\complement_E U_i) = \complement_E \cup_{i \in I} U_i$. Et puisque $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, on a $\cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$. (1pt)

Exercice 2(8pts)

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $\forall (x, y, z) \in E^3, |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$
2. Une partie A de E est dite bornée si elle est vide ou si son diamètre $\delta(A)$ est fini. On rappelle que

$$\delta(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y)$$

Montrer que toute partie A de E contenue dans une boule fermée $B_f(b, r)$ est bornée.

3. Réciproquement, montrer que toute partie non vide et bornée de E est contenue dans une boule fermée.

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrons que $\forall (x, y, z) \in E^3, |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$

D'après la propriété de l'inégalité triangulaire, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ et $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y)$

La distance étant symétrique, on obtient alors $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$ et $d(z, y) - d(z, x) \leq d(x, y)$, d'où la double inégalité $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$ qui signifie $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ (2 pts)

2. Montrons que toute partie A de E contenue dans une boule fermée $B_f(b, r)$ est bornée.

Soit A une partie de E contenue dans une boule fermée $B_f(b, r), b \in E$

- Si A est vide, elle est bornée par définition.

- Si A est non vide, alors $\forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq d(x, b) + d(b, y) \leq 2r$, donc $\delta(A) \leq 2r$, et par suite, A est borné. (3 pts)

3. Montrons que toute partie non vide et bornée de E est contenue dans une boule fermée.

Soit A une partie non vide et bornée de E .

Il existe un réel positif r tel que $\delta(A) \leq r$. Soit $a \in A$ et $b \in E$. Considérons la boule fermée $B_f(b, r + d(a, b))$. On a, pour tout $x \in A$, $d(b, x) \leq d(x, a) + d(a, b) \leq r + d(a, b)$. Donc A est contenue dans la boule fermée $B_f(b, r + d(a, b))$. (3 pts)

Exercice 3(6pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 2. Démontrer que pour tout $(x, y) \in D_f$, $|f(x, y)| \leq 3(x^2 + y^2)$. (On pourra remarquer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$)
 3. Dédurre des questions précédentes que f est prolongeable par continuité au point $(0, 0)$ puis définir ce prolongement.
-

1. Ensemble de définition D_f de la fonction f

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. (1pt)

2. Démontrons que pour tout $(x, y) \in D_f$, $|f(x, y)| \leq 3(x^2 + y^2)$.

$$|x^3 + y^3| = |(x + y)(x^2 - xy + y^2)| \leq |x + y|(|x^2 + y^2| + |xy|) \leq \frac{3}{2}|x + y|(x^2 + y^2)$$

Or $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, d'où $|x + y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ et par suite,

$$|x^3 + y^3| \leq 3 \frac{\sqrt{2}}{2} (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}$$

Par conséquent,

$$|f(x, y)| \leq 3(x^2 + y^2) \quad (3pts)$$

3. Prolongement par continuité de f en $(0, 0)$

De la question 2., on déduit que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Cette limite étant finie, f est prolongeable par continuité au point $(0, 0)$. Soit g son prolongement par continuité en $(0, 0)$. g est définie comme suit :

$$g(x, y) = f(x, y) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad g(0, 0) = 0 \quad (2pts)$$
