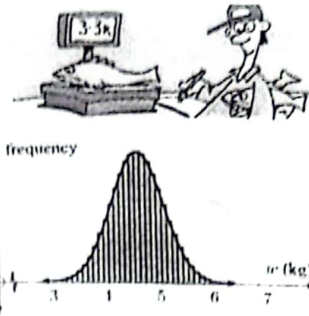


DISTRIBUTION NORMALE.

1. Variable continue et la probabilité.

Problématique. Dans un bassin il y a des centaines des poissons. On s'intéresse à leurs poids w en kg. Pour cette étude on peut les regrouper en classes : $3 < w < 3,1$; $3,1 < w < 3,2$; ...
Soit le poids moyen 4,73kg et l'écart-type est 0,53kg.
Le diagramme ci-contre représente les résultats de cette étude.

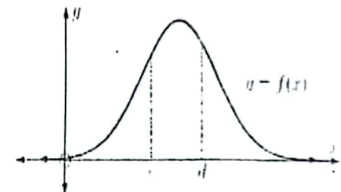


Comment on peut trouver le pourcentage des poissons qui ont le poids

- a) Plus de 6 kg
- b) Entre 3 et 4 kg

Considérons une variable continue X (on note toujours la variable par la lettre majuscule). Elle peut prendre différentes valeurs x appartenant à un certain intervalle. Pour définir la probabilité que la variable X prend nous allons utiliser la fonction de densité de probabilité $f(x)$. Cette fonction est telle que :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$



- $f(x) > 0$ pour tout x appartenant au domaine de f .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- La probabilité que la variable X prend si $c \leq X \leq d$ est égale à l'aire sous la courbe de $f(x)$ et donc égale à $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$

Pour la variable continue X , la probabilité qu'elle prend une valeur discrète x est toujours zéro. $P(X = x) = 0$ pour tout x .

On calcule la probabilité si la variable X prend les valeurs sur un intervalle. Il n'est pas important si cet intervalle est fermé ou ouvert.

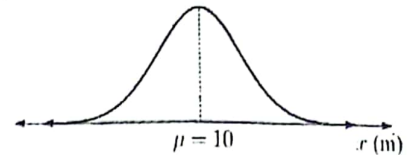
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

La distribution normale modélise plusieurs domaines de la vie réelle. Par exemple :

- Certaines aspects physique (la taille, le poids,...)
- Les résultats d'un examen
- Certaines régularités dans la nature

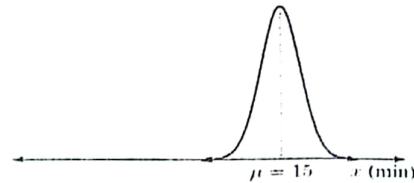
Exemple 1. La hauteur des arbres dans un parc

suit une distribution normale autour de la moyenne 10m avec l'écart-type 3m.



Exemple 2. Le temps que Ali met pour aller

à l'école suit une distribution normale avec la moyenne 15 min et l'écart-type 1 min.

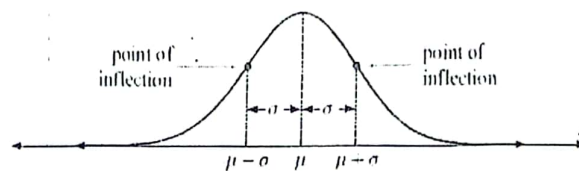


La courbe est toujours symétrique par rapport à la droite **verticale d'équation $x = \mu$** , où μ est la moyenne.

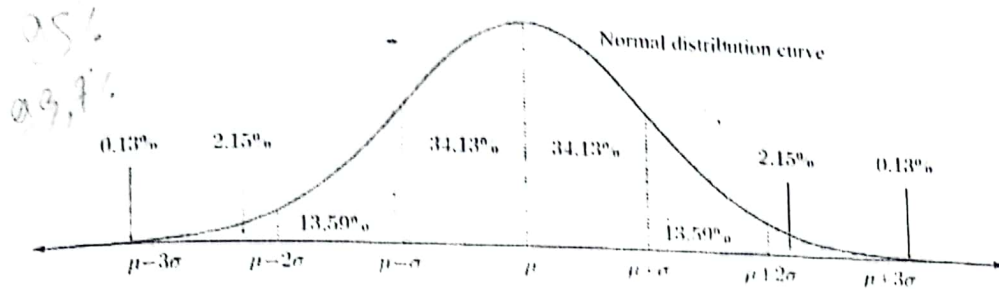
Si la variable X est normalement distribuée avec la moyenne μ et l'écart-type σ , alors on écrit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Pour la courbe de la distribution normale l'écart-type définit la distance horizontale de la moyenne aux points d'inflexion de la courbe.

So, the points of inflection are at $x = \mu + \sigma$ and $x = \mu - \sigma$.



Voici les paramètres de la courbe de la distribution normale avec la moyenne μ et l'écart-type σ .



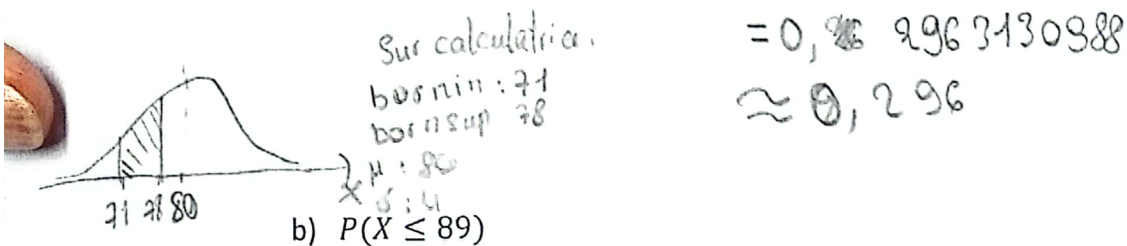
- Notice that:
- $\approx 68.26\%$ of values lie between $\mu - \sigma$ and $\mu + \sigma$
 - $\approx 95.44\%$ of values lie between $\mu - 2\sigma$ and $\mu + 2\sigma$
 - $\approx 99.74\%$ of values lie between $\mu - 3\sigma$ and $\mu + 3\sigma$.

We can use these proportions to find the probability that the value of a normally distributed variable will lie within a particular range.

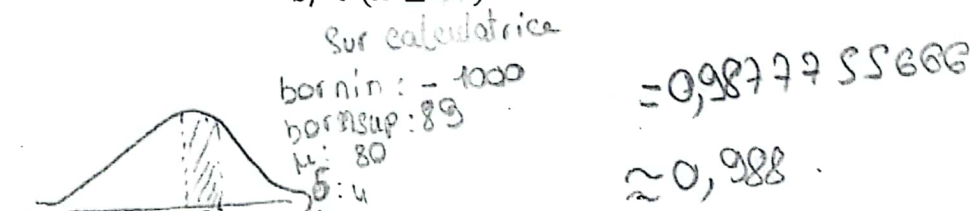
2. Utilisation de la calculatrice pour calculer la probabilité.

Exercice 1. Sachant que $X \sim N(80, 4^2)$ trouvez

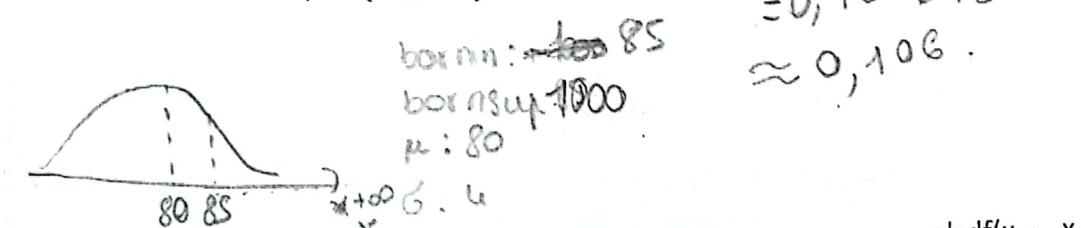
a) $P(71 \leq X \leq 78)$



b) $P(X \leq 89)$



c) $P(X \geq 85)$



Utilisation de la calculatrice : DISTR

normalcdf($X_{\min}, X_{\max}, \mu, \sigma$)

Exercices 2.

1. Trouvez la probabilité d'une variable normalement distribuée entre

a) σ avant la moyenne et σ après la moyenne.

- b) La moyenne et la valeur 2σ après la moyenne.
3. Dans une compétition la taille moyenne des joueurs de basket Ball est 184cm. L'écart-type est 5cm. Trouvez le pourcentage des joueurs aillant la taille
- Plus de 189cm
 - Entre 174cm et 199cm,
 - Plus de 179cm
 - Moins de 199cm.
4. Sachant que $X \sim N(16, 3^2)$ trouvez
- $P(13 \leq X \leq 16)$
 - $P(X \leq 13)$
 - $P(X \geq 22)$
 - $P(16 \leq X \leq 25)$.
5. Sachant que $X \sim N(32, 36)$ trouvez
- $P(25 \leq X \leq 31)$
 - $P(X \leq 30,9)$
 - $P(X \geq 27)$
 - $P(22,1 \leq X \leq 32,1)$.
6. Soit $X \sim N(37, 7^2)$.
- En utilisant la calculatrice trouvez $P(X \geq 41)$.
 - En déduire $P(37 \leq X \leq 41)$ sans calculatrice.
7. Une machine produit les vices métalliques. La longueur de ces vises est normalement distribuée avec la moyenne 19,9cm et l'écart-type 0,2cm. Une vice était sélectionnée au hasard. Trouvez la probabilité que sa longueur est entre 19,7cm et 20cm.
8. La vitesse de voitures passant devant une école est normalement distribuée avec la moyenne 53,7km h⁻¹ et l'écart-type 6,3km h⁻¹. Trouvez la probabilité qu'une voiture sélectionnée au hasard a la vitesse
- Entre 50 et 55km h⁻¹.
 - Plus de 60km h⁻¹.
 - Moins de 48km h⁻¹.

3. Recherche de la valeur k de la variable X sachant la probabilité.

Problématique. Considérons la population des crabes et la variable X en mm représente la longueur de la coquille. Pour protéger leur population les biologistes proposent de pêcher seulement 5% des plus gros. On sait que la longueur moyenne est de 70 mm avec l'écart-type 10 mm.

A partir de quelle longueur de la coquille on peut pêcher les crabes?

Le problème revient à trouver la valeur de k pour laquelle $P(X > k) = 0,05$ ou

$$P(X < k) = 0.95.$$

Sur la calculatrice il y a le programme qui permet de trouver la valeur de k de l'équation $P(X < k) = p$, sachant la valeur de p . C'est **invers normal fonction (DISTRIBUTION 3 :)**.

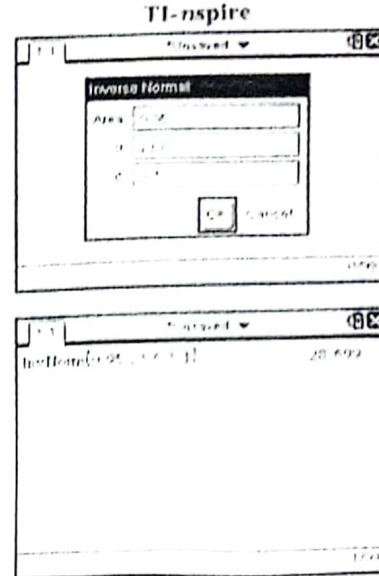
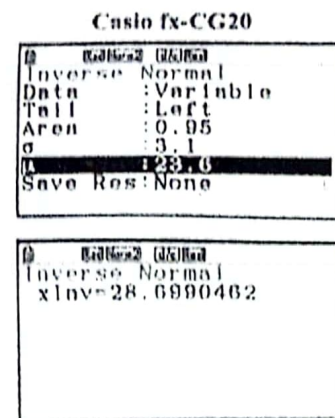
On tape sur la calculatrice TI 3 : (invNorm(probabilité, moyenne, écart-type)).

Dans notre cas $\text{invNorm}(0.95, 70, 10) = 86,4$ donc $k = 86,4$

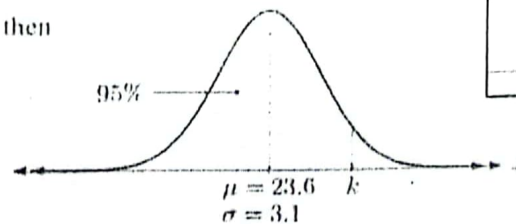
Exemple 1.

If $X \sim N(23.6, 3.1^2)$, find k for which $P(X < k) = 0.95$.

X has mean 23.6 and standard deviation 3.1.



If $P(X < k) = 0.95$ then
 $k \approx 28.7$



Page 616 EX 14 L (1, 2, 4, 5)

Exemple d'utilisation de la distribution normale et de la distribution binomiale.

The time taken by students to complete a puzzle is normally distributed with mean 28.3 minutes and standard deviation 3.6 minutes. Calculate the probability that:

- a randomly selected student took at least 30 minutes to complete the puzzle
- out of 10 randomly selected students, at most half of them took at least 30 minutes to complete the puzzle.

- Let X denote the time for a student to complete the puzzle.

$$X \sim N(28.3, 3.6^2)$$

$$\therefore P(X \geq 30) \approx 0.31838 \quad \{\text{using technology}\}$$

$$\approx 0.318$$

- Let Y denote the number of students who took at least 30 minutes to complete the puzzle.

$$\text{Then } Y \sim B(10, 0.31838)$$

$$\therefore P(Y \leq 5) \approx 0.938 \quad \{\text{using technology}\}$$

$$\mu - \sigma = 25 - 0,4$$

4. La distribution normale réduite (standard).

Si on transforme la fonction de densité de probabilité $f(x)$ en créant une nouvelle variable aléatoire Z , tel que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ alors on obtient une fonction de densité de probabilité réduite (ou standard) avec

$\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

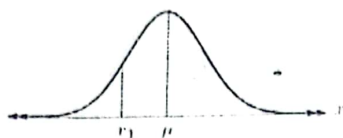
La courbe de $f(z)$ est symétrique par rapport à la droite $x = 0$ et les abscisses des points d'inflexion sont ± 1 .

Ça signifie que pour les distributions $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et $Z \sim N(0, 1)$ pour chaque

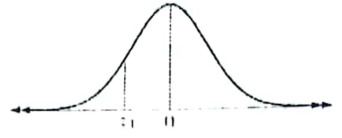
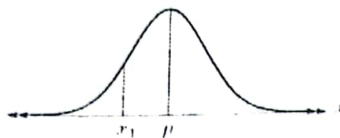
x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$ il existe les valeurs de Z correspondantes $z_1 = \frac{(x_1 - \mu)}{\sigma}$ et

$z_2 = \frac{(x_2 - \mu)}{\sigma}$ telles que

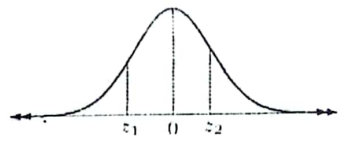
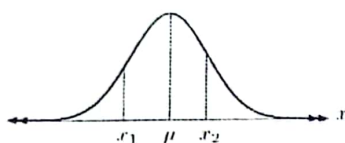
- $P(X \geq x_1) = P(Z \geq z_1)$



- $P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_1)$



- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2)$

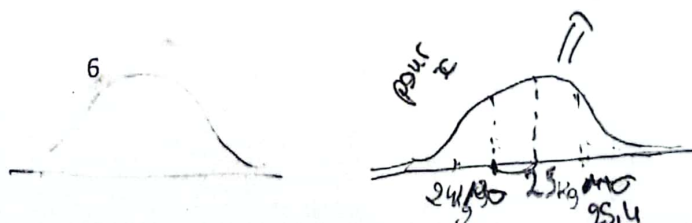
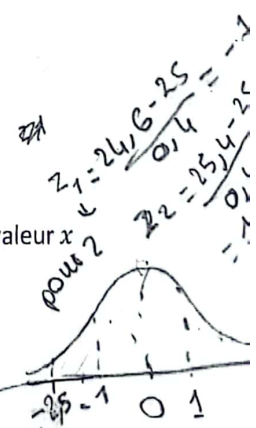


La signification de la valeur z.

Comme $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ alors $z\sigma = x - \mu$ et donc z représente le nombre de écart-type entre la valeur x et la moyenne μ .

Par exemple. Si $z = 1,3$ ça signifie que x est à 1,3 écart-type à droite de la valeur moyenne.

Si $z = -0,8$ ça signifie que x est à 0,8 écart-type à gauche de la valeur moyenne.



La variable Z peut être utilisé pour comparer deux populations avec différentes valeurs de μ et de σ .

Exemple.

Kelly scored 73% in History where the class mean was 68% and the standard deviation was 10.2%. In Mathematics she scored 66%, where the class mean was 62% and the standard deviation was 6.8%.

In which subject did Kelly perform better compared with the rest of her class?

Assume the scores for both subjects were normally distributed.

$$\text{Kelly's } z\text{-score for History} = \frac{73 - 68}{10.2} \approx 0.490$$

$$\text{Kelly's } z\text{-score for Mathematics} = \frac{66 - 62}{6.8} \approx 0.588$$

So, Kelly's result in Mathematics was 0.588 standard deviations above the mean, whereas her result in History was 0.490 standard deviations above the mean.

$\therefore$ Kelly's result in Mathematics was better compared to her class, even though her percentage was lower.

Page 617 Exemple 16, 17

Page 619 EX 14 M

Page 623 EX de 18 à 26