

TRAVAUX DIRIGES SEMESTRE 4

TD FONCTIONS DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^p$ 2025 - 2026

Exercice 1

1. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^3 + 3x e^y, y - x^2)$$

est C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

2. On note $U =]0, +\infty[$ et $\phi : (x, y) \mapsto \left(x^3 y^2, \frac{1}{x^2 y}\right)$ est C^∞ -difféomorphisme de U sur U

Exercice 2

On considère la forme différentielle $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur U .

Exercice 3

Montrer que $w : (x, y, z) \mapsto \left(x + y + z, \frac{y + z}{x + y + z}, \frac{z}{y + z}\right)$ est un C^1 -difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid x + y + z < 1\}$ sur $V =]0, 1[$. Déterminer w^{-1} .

Exercice 4

On considère la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$$

sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$

- Montrer que ω est fermée sur U .
- Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y x^2 \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y \end{cases} \quad \left| \quad 3. \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x y^2 \end{cases}$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On note :

- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, u) \mapsto f(2t - u, 4t + 3u),$
- $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, u) \mapsto f(t^2 + 2u^2, e^{tu}),$

Calculer les dérivées partielles premières de g, h en fonction de celles de f .

Exercice 7

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonction suivantes :

- $g(x, y) = f(y, x)$
- $g(x, y) = f(x, x)$
- $g(x, y) = f(y, f(x, x))$
- $g(x, y) = f(x, f(x, x))$