

FONCTIONS DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^p$

Sommaire

1.1 Définition et exemples	2
1.2 Limites et continuité	3
1.3 Fonctions de classe C^1 et matrice jacobienne	4
1.4 Différentielle d'une application et difféomorphisme	7
1.5 Equations aux dérivées partielles	8
1.6 Formes différentielles	9
1.7 Exercices	11

1.1 Définition et exemples

Nous étudions dans ce chapitre des techniques de calcul pour des fonctions définies sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$, donc dépendant de n variables réelles, et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Nous nous limiterons souvent aux dimensions 2 et 3, la généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier.

Définition 1.1

i) Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, est de la forme :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

ii) Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point de $\mathbb{R}^n$, les fonctions $x_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ définies sur un intervalle ouvert contenant a_i sont les fonctions partielles associées à f au point a .

iii) Les fonctions, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_j((x_1, \dots, x_n))$, $j \in \{1, \dots, p\}$, sont les fonctions composantes (ou fonctions coordonnées) de f .

Exemple

$$1) \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \longmapsto g(x, y) = (x^2 - y^2, xy, x + y)$$

2) Surface et volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2(xy + yz + xz), xyz) \end{aligned}$$

3) Coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

4) Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

5) Coordonnées sphériques d'un point de l'espace :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) &\longmapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \end{aligned}$$

Définition 1.2

Si $n = 2$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est la surface représentative de f . C'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction à une variable.

Définition 1.3

Si $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \dots, x_n) = k\}$ est la ligne de niveau k de la fonction f . Si $n = 2$, c'est une courbe plane; si $n = 3$, c'est une surface.

Si (x_1, x_2) représente un point sur une carte et si $f(x_1, x_2)$ désigne son altitude, les lignes de niveau sont les courbes de même altitude qu'on trouve sur les cartes d'état-major.

1.2 Limites et continuité

Définition 1.4

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de U (ou sur sa frontière) et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$.

Soit la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a et l'on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si chaque fonction coordonnée $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet ℓ_i pour limite en a .

$$\text{C'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \ell_1 \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow a} f_p(x) = \ell_p \end{cases}.$$

Remarque

Lorsque la limite ℓ existe, alors elle est unique.

Exemple

Soit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x), \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

Calculons la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$:

Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées $f_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x)$ et $f_2(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2 - 1) \frac{\sin x}{x} = -1 \times 1 = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \times 1 = 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_2(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^2)}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^2)}{|y|} = \lim_{y \rightarrow 0} |y| \frac{\sin(y^2)}{y^2} = 0 \times 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x^2)}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sin(x^2)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2} |x| \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \sqrt{2} \times 0 \times 1 = 0.$$

On en déduit que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 1 \times 0 = 0$.

Conclusion : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) \right) = (-1, 0)$.

Définition 1.5

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- i) Si $a \in U$, on dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a (qui est nécessairement $f(a)$).
- ii) Si f est continue en tout point de U , on dit que f est continue sur U .

Théorème 1.1

Soit l'application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$.

- i) L'application f est continue en $a \in U$ si, et seulement si, toutes ses applications coordonnées sont continues en a .
- ii) L'application f est continue sur U si et seulement si ses applications coordonnées sont continues sur U .

Exemple

L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left(x^2 + xy, \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux applications coordonnées sont continues.

1.3 Fonctions de classe C^1 et matrice jacobienne**Définition 1.6** (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$

On dit que f admet une dérivée partielle en $a = (a_1, \dots, a_n)$ suivant la $i^{\text{ème}}$ variable si et seulement si les p fonctions coordonnées de f admettent une dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable et l'on pose alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right)$.

Définition 1.7 (Fonction de classe C^1)

Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $D \subset \mathbb{R}^n$.

f est de classe C^1 sur D (ou f est continûment différentiable sur D), si toutes les fonctions dérivées partielles $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ sont continues sur D .

Dans le cas général, f est de classe C^1 sur D si ses p fonctions coordonnées f_j , ($j = 1, \dots, p$), sont toutes de classe C^1 sur D .

Définition 1.8 (Vecteur gradient)

Le gradient de f en a est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières : $\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \vec{e}_i$. Il est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par a .

Définition 1.9 (Matrice jacobienne, Jacobien)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 en $a \in D$.

1) On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de sa différentielle en a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

2) Si $n = p$, le déterminant de $J_{f(a)}$ est le jacobien de f au point a . On le note $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$.

Exemple (Exercice d'application)

- 1) Ecrire la matrice jacobienne de l'application $f : (x, y, z) \mapsto (xyz, x^2y + z)$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Calculer la matrice jacobienne au point $(1, 2, 0)$ de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \left(x^2y^3z^4, \frac{xy}{z^2 + x^2 + 1}\right)$.

Théorème 1.2

Soit $p, q, r \in \{1, 2, 3\}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 sur U et telle que $f(U) \subset V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^1 sur V .

La fonction $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe C^1 sur U et l'on a pour tout $a \in U$, $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$.

Exemple

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto (x + y, x^2 - y^2, xy).$$

Les matrices jacobienne sont : $J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ et $J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$.

La composée $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par $g \circ f(r, \theta) = (r(\cos \theta + \sin \theta), r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), r^2 \sin \theta \cos \theta)$.

Sa matrice jacobienne est donc

$$\begin{aligned} J_{g \circ f}(r, \theta) &= J_g(r \cos \theta, r \sin \theta) J_f(r, \theta) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ J_{g \circ f}(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta & r(\cos \theta - \sin \theta) \\ 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -4r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 2r \sin \theta \cos \theta & r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 1.3

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 sur U .

Si f est une bijection de U sur $f(U) \subset \mathbb{R}^n$, alors f admet une application réciproque f^{-1} de classe C^1 sur $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ et l'on a pour tout $a \in U$, en posant $b = f(a)$, $J_{f^{-1}}(b) = (J_f(a))^{-1}$.

Autrement dit, la matrice jacobienne de l'application réciproque f^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne de f .

Exemple

On pose $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow U$
 $(x, y) \mapsto (x^2, xy)$.

La matrice jacobienne de f est $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

Montrons que f est une bijection :

Soit $(a, b) \in U$ (donc par définition a et b sont strictement positifs), on cherche $(x, y) \in U$ tel

que $f(x, y) = (a, b)$, c'est à dire x et y strictement positifs vérifiant $\begin{cases} a = x^2 \\ b = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ y = \frac{b}{\sqrt{a}} \end{cases}$.

Donc tout $(a, b) \in U$ admet un unique antécédent $(x, y) \in U$. Donc f est bien une bijection de U

dans U . Sa bijection réciproque est définie par $f^{-1} : U \rightarrow U$
 $(a, b) \mapsto \left(\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}} \right)$.

On calcule sa matrice jacobienne en inversant la matrice $J_f(x, y) : (J_f(x, y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$,

puis en remplaçant $x = \sqrt{a}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a}}$. On obtient $J_{f^{-1}}(a, b) = \left(J_f \left(\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}} \right) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{a}} & 0 \\ -\frac{b}{2a\sqrt{a}} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$

1.4 Différentielle d'une application et difféomorphisme

Définition 1.10 (Fonction différentiable (cas général))

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

On dit que f est différentiable en $a \in D$ s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \ell(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Dans ce cas, l'application ℓ est unique. On l'appelle la différentielle de f au point a et on la note df_a .

Théorème 1.4 (Cas $p = 1$)

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

i) Si f est différentiable en a , alors toutes les dérivées partielles premières de f en a existent.

ii) Si f est de classe C^1 en a , alors f est différentiable en a .

Les deux réciproques sont fausses.

Remarque (Notation différentielle (cas $p = 1$))

Si $p = 1$, toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $h = (h_1, \dots, h_n) \mapsto \ell(h) = \sum_{i=1}^n A_i h_i$.

Si f est différentiable en a , on a nécessairement $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

En notant dx_i la i -ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $dx_i(h) = h_i$), la différentielle de f s'écrit : $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

Définition 1.11 (Différentielle d'une composée)

Soient $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D_2 \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur des ouverts tels que $f(D_1) \subset D_2$.

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Dans le cas $q = 1$ on a alors $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))$.

Définition 1.12 (Difféomorphisme)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $V = f(U)$.

On dit que l'application $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de U sur V si et seulement si :

- i) f est une bijection ;
- ii) f est de classe C^1 sur U , c'est-à-dire continûment différentiable sur U ;
- iii) f^{-1} est de classe C^1 sur V .

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion locale)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert D .

Soit $a \in D$ tel que df_a soit inversible, c'est-à-dire tel que le jacobien $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$ soit non nul.

Il existe un voisinage ouvert U de a tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Définition 1.13 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en $a \in D$, ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en a . On les note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$.

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

Définition 1.14 (Fonction de classe C^k)

Si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D , on dit que f est de classe C^k sur D . Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe C^∞ .

Théorème 1.6 (Théorème de Schwarz)

Soient $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall i \neq j$.

Définition 1.15 (C^k -difféomorphisme)

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Une application $f : U \rightarrow V$, est difféomorphisme de classe C^k de U sur V (ou un C^k -difféomorphisme) si et seulement si :

- i) f est une bijection de U sur V ;
- ii) f est de classe C^k de U sur V ;
- iii) f^{-1} est de classe C^k sur V .

1.5 Equations aux dérivées partielles

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. On note (x_0, y_0) un point de U et U_1 (resp. U_2) la projection de U sur l'axe $y = 0$ (resp. $x = 0$).

Proposition 1.1

Soit h une fonction de classe C^0 sur U . On note H la primitive de $h_1 : x \mapsto h(x, y)$ sur U_1 qui s'annule en x_0 . Une fonction f de classe C^1 sur U est une solution de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x, y)$ si, et seulement si, il existe une fonction k de classe C^1 sur U_2 telle que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = H(x, y) + k(y)$.

Proposition 1.2

Soit h une fonction de classe C^0 sur U_1 et H la primitive de h sur U_1 . Une fonction f de classe C^2 sur U est une solution de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = h(x)$ si, et seulement si, il existe une fonction K de classe C^2 sur U_2 telle que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = yH(x) + K(y)$.

Proposition 1.3

Soit f une fonction de classe C^2 sur U est une solution de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$ si, et seulement si, il existe deux fonctions K et H de classe C^2 sur U_2 telle que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = xH(y) + K(y)$.

Exemple

Soit $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = a, a \in \mathbb{R}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = a \iff \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ay + h(x) \iff f(x, y) = a\frac{y^2}{2} + yh(x) + \phi(x)$, où h et ϕ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.6 Formes différentielles**Définition 1.16** (Forme différentielle)

Une forme différentielle de degré 1 est une application ω , définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans le dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

En notant dx_i la i -ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $dx_i(h) = h_i$), ω s'écrit :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U, \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) dx_i.$$

Les P_i , applications de U dans $\mathbb{R}$, sont les fonctions coordonnées de ω .

Si tous les P_i sont de classe C^k sur U , on dit que ω est de classe C^k sur U .

Définition 1.17 (Forme exacte)

Une forme différentielle ω est exacte s'il existe une fonction f de U dans $\mathbb{R}$ telle que $df = \omega$. On dit alors que f est une primitive de ω sur U .

Définition 1.18 (Forme fermée)

Une forme différentielle ω est fermée si $\forall i$ et $\forall j$ on a : $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

Remarque (*Condition nécessaire pour ω exacte*)

Une forme différentielle exacte de classe C^1 est toujours fermée.
En physique, cela signifie que l'on a toujours $\text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$.

Définition 1.19

- i) Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in U$ tel que, pour tout $x \in U$, le segment d'extrémités a et x soit inclus dans U .
- ii) Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si toute courbe fermée incluse dans U peut se ramener à un point par déformation continue.

Théorème 1.7 (Théorème de Poincaré)

Si U est un ouvert étoilé, ou si U est simplement connexe, alors : ω exacte sur $U \iff \omega$ fermée sur U .

Remarque

L'équivalence dans le **Théorème 1.7** (**Théorème de Poincaré**) exige une hypothèse sur U . Elle n'est pas vraie dans le cas du plan privé d'un point, de l'espace privé d'une droite.

Exemple (*Exercice d'application*)

On considère la forme différentielle $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.
Montrer que ω est exacte puis chercher ses primitives sur U .

Solution

On remarque que U est étoilé (par rapport à $(1; 0)$ par exemple). On vérifie que ω est fermée : En posant $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, on vérifie que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

Par le **Théorème de Poincaré** (**Théorème 1.7**), ω est exacte.

On cherche ses primitives sur U , i.e. les fonctions f de classe C^1 sur U telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

On résout la seconde équation en intégrant par rapport à y : on trouve $f(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + H(x)$

où H est C^1 et ne dépend que de x . On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = H'(x) - \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

On a donc $H'(x) = 0$ sur U , ce qui entraîne que H est constante. Les primitives de f sont donc de la forme : $f(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

1.7 Exercices

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

- 1) Calculer la matrice jacobienne de la fonction
- 2) Montrer que f est une bijection, calculer sa bijection réciproque et la matrice jacobienne de la réciproque.