

Produit scalaire

I. Géométrie non repérée

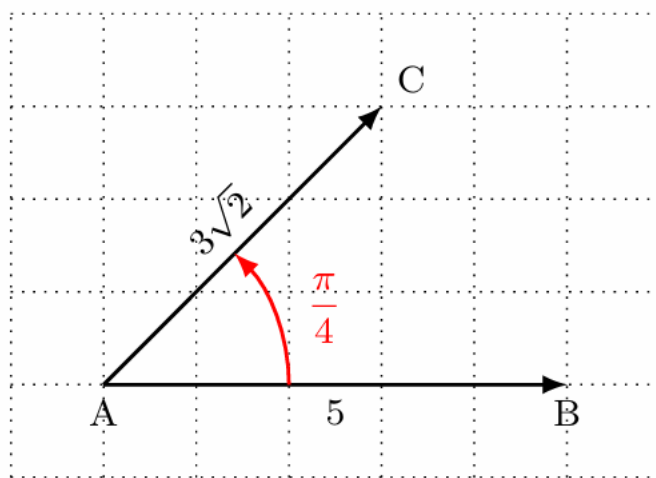
Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ représente l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

Exemple

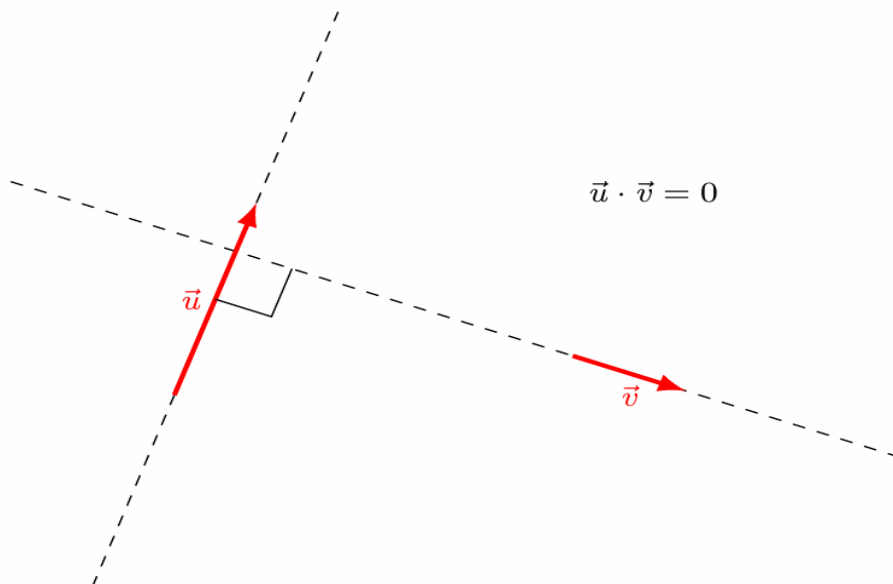


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 15.\end{aligned}$$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$



Démonstration

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Alors, $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ et donc $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$. Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0 = 0.$$

Nous venons de démontrer que :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

- Supposons maintenant que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; alors :

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0.$$

Or, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ donc $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$. Cela implique que $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π), et donc que les vecteurs sont orthogonaux.

Nous venons de démontrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux.}$$

Ainsi, nous avons ainsi démontré l'équivalence de la propriété.

Propriété

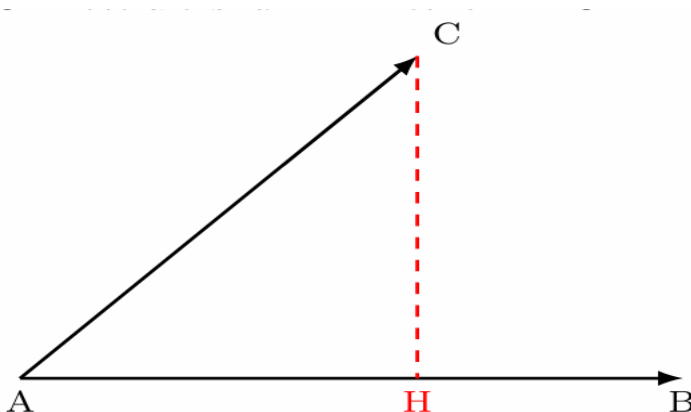
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Démonstration

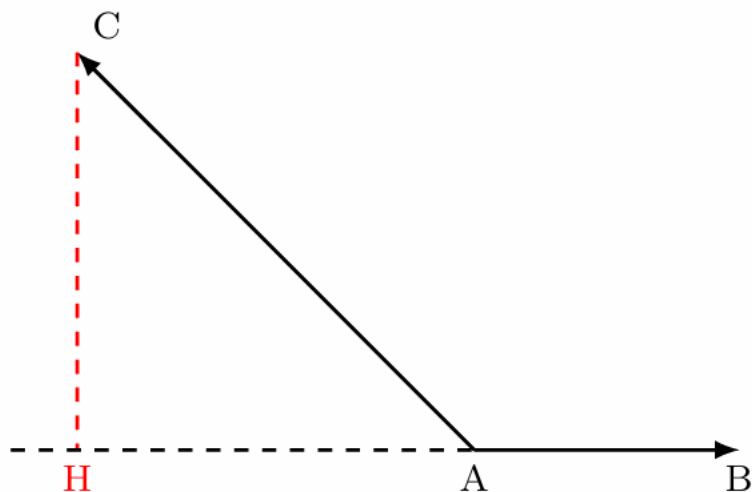
On place les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sorte qu'ils aient la même origine.

On note alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



• **1^{er} cas.**

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= AB \times AH.\end{aligned}$$

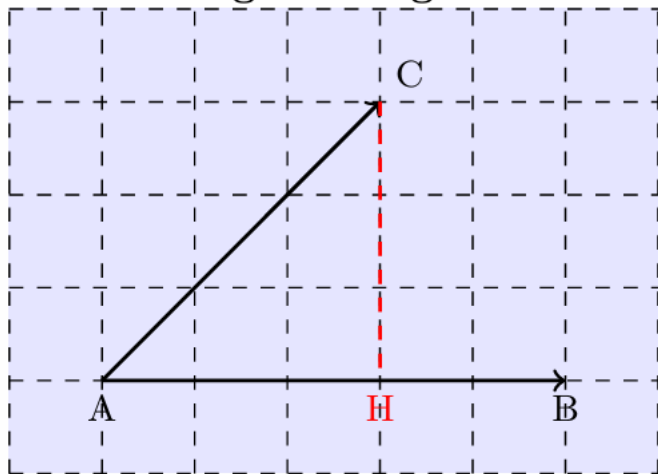


• **2^e cas.**

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -AB \times AC \times (-\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})) \\ &= -AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -AB \times AH.\end{aligned}$$

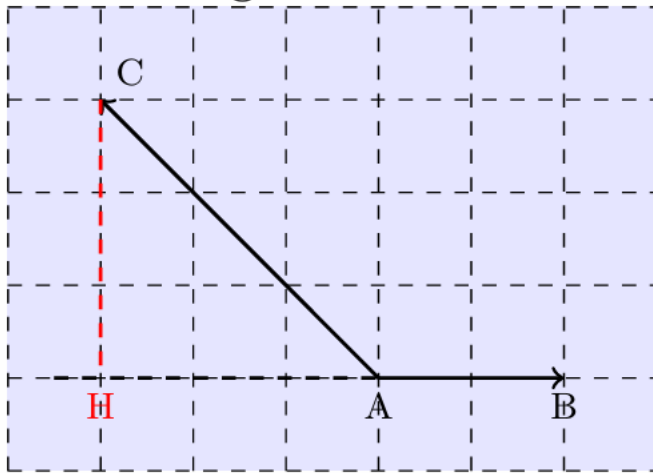
Exemples

Cas où l'angle est aigu.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AH \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15.\end{aligned}$$

Cas où l'angle est obtus.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -AB \times AH \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6.\end{aligned}$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

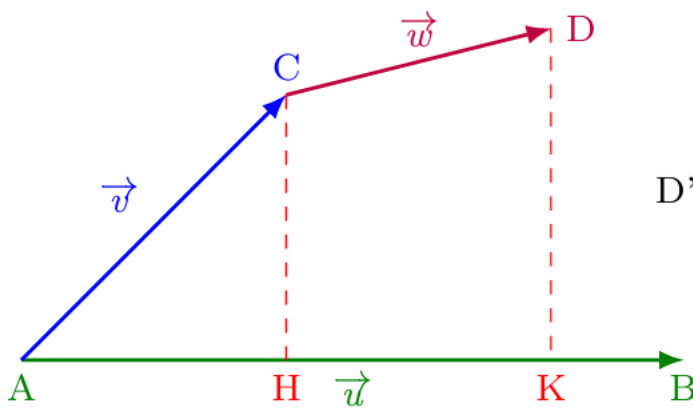
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Démonstration

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme sur le schéma ci-dessous. On ne considèrera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \times AK.\end{aligned}\quad (1)$$



D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \times AH\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= AB \times HK.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= AB \times AH + AB \times HK \\ &= AB \times (AH + HK) \\ &= AB \times AK .\end{aligned}\quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} .$$

Exemple

Quels que soient les points A , B , C et D du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} .\end{aligned}$$

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} .$$

Démonstration

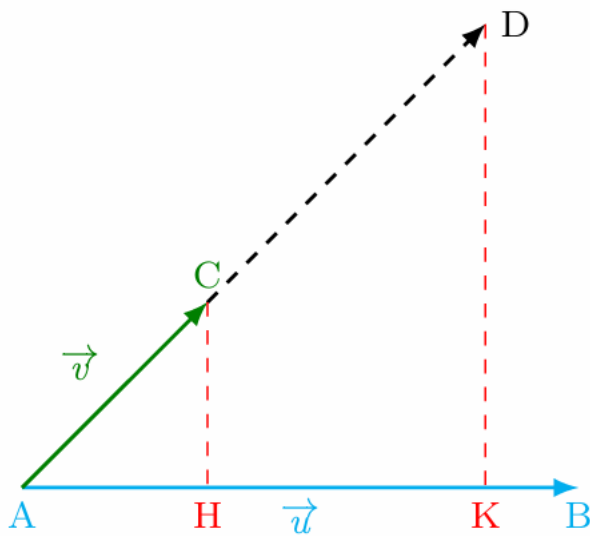
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos[-(\vec{v}, \vec{u})] \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) && \text{car la fonction } x \mapsto \cos x \text{ est paire} \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) && \text{car pour } a \text{ et } b \text{ réels, } a \times b = b \times a \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} .\end{aligned}$$

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) .$$

Démonstration



Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $k\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

D'après le théorème de Thalès,

$$AD = kAC \implies AK = kAH.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= AB \times AK \\ &= AB \times kAH \\ &= kAB \times AH\end{aligned}$$

et

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = kAB \times AH.$$

$$\text{Donc, } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Un raisonnement analogue montrerait que $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Propriété : Bilinearité du produit scalaire

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k^2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Démonstration

D'après la propriété *résultat intermédiaire*,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k^2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Propriété

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

- ❶ $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
- ❷ $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration

- ❶ $\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$
- ❷ $\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$

Propriété : Identités avec des normes

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) .$$

Démonstration

- Nous avons vu précédemment que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 .$$

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

- En exploitant l'égalité :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 ,$$

on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) .$$

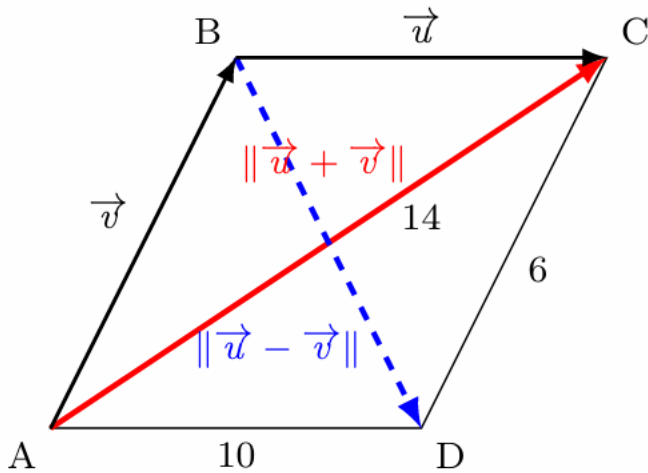
- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) . \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)}.$$

Exemple : Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis déduire BD.



- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
 $= \frac{1}{2} (14^2 - 10^2 - 6^2)$
 $= 30.$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
 $30 = \frac{1}{4} (14^2 - AC^2)$
 $30 \times 4 = 196 - AC^2.$

Ainsi, $AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$

II. Géométrie repérée

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$

Démonstration

D'après la propriété *identités avec des normes*,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

On sait que : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ car on est dans un repère orthonormé.

De plus,

$$(\vec{u} - \vec{v}) \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

Exemple

On pose $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 1 + (-2) \times 7 \\ &= 5 - 14 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Nous avons vu que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sqrt{5^2 + (-2)^2} \times \sqrt{1^2 + 7^2} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \sqrt{29} \times \sqrt{50} \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 5\sqrt{58} \cos(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58} \cos(\vec{u}, \vec{v}) ,$$

soit :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0,236351579148 .$$

On en déduit alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 104^\circ.$$