

Sommaire

- 1 Processus aléatoires, chaînes de Markov
 - Ergodicité
 - Chaîne de Markov continues

Introduction

on appelle processus aléatoire une famille de v.a. $X = \{X(t) : t \in T\}$ à valeurs dans un espace $\mathcal{X}$ où T est un ensemble quelconque. Lorsque $T \subset \mathbb{N}$ on dit que le processus X est à temps discret et lorsque T est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ on dit que X est un processus à temps continu. Lorsque $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, X est dit processus réel. L'application $T \rightarrow \mathcal{X}$, $t \mapsto X(t)$ est appelée trajectoire du processus et pour tout $t \in T$, $\omega \mapsto X(t, \omega)$ est appelé état du processus au temps t . Une suite de v.a.r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un exemple simple de processus aléatoire avec $T = \mathbb{N}$ et $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Nous étudierons ici un exemple de processus aléatoire courant : chaîne de Markov classique.

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Définition 1.1: Processus aléatoires, chaînes de Markov

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace fini ou dénombrable E servant à modéliser l'état d'un système au cours du temps, X_n désignant cet état au temps n . Dans ce cadre, nous dirons que le système se trouve dans l'état $i \in E$ au temps n si $X_n = i$.

On appelle chaîne de Markov, un processus dont l'état futur ne dépend du passé que par le présent. En particulier, on dira qu'un processus aléatoire $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'états E , si, partant de tout état i de E , la probabilité que la chaîne passe immédiatement à l'état j de E est constante au cours du temps. Plus formellement :

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Définition 1.2: Chaînes de Markov homogène

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace fini ou dénombrable E . On dira que X est une chaîne de Markov homogène (CMH) si, pour tous états $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in E$ et pour tout $n \in N^*$,

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \quad (1)$$

Les probabilités $P(i, j) = P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i]$, $(i, j) \in E^2$ sont appelées **probabilités de transition** de la CMH.

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Les probabilités de transitions $P_{i,j} = P(i, j)$ vérifient

$$P_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in E, \quad \sum_{j \in E} P_{i,j} = 1 \quad (2)$$

Lorsque E est fini, avec $\text{Card}(E) = M$, il est commode de disposer de la matrice de transition $\mathbb{P} = [P_{i,j}]$, $1 \leq i, j \leq M$ de la CMH X . La connaissance de transitions $\mathbb{P}$ d'une CMH $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la loi initiale de X_0 détermine la loi de toute la chaîne.

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Exemple

On admet que le fait qu'il ait plu ou non un jour donné est la seule considération à prendre en compte pour prévoir s'il pleuvra le lendemain. Plus précisément s'il ne pleut pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec probabilité α et s'il ne pleut pas aujourd'hui, il ne pleuvra pas demain avec probabilité β , $0 < \alpha, \beta < 1$. En convenant de dire que le système est dans l'état 1 s'il ne pleut pas et dans l'état 2 s'il pleut, la situation peut être représentée par une CMH à deux états $E = \{1, 2\}$ et les probabilités de transitions $P_{11} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 1] = 1 - \alpha$, $P_{12} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 1] = \alpha$, $P_{21} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 2] = \beta$, $P_{22} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 2] = 1 - \beta$. La matrice de transitions est donc

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une CMH. La probabilité de passer d'un état i à un état j en une transition est $P_{i,j} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$. Mais la probabilité que la chaîne passe de i à j en m transitions s'écrit

$$P_{ij}^{(m)} = P^{(m)}(i, j) = P[X_{n+m} = j | X_n = i] \quad (3)$$

e.g.

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)} &= P^{(2)}(i, j) = P[X_{n+2} = j | X_n = i] = P[X_2 = j | X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in E} P[X_2 = j | X_1 = k] P[X_1 = k | X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in E} P(k, j) P(i, k) = \sum_{k \in E} P_{ik} P_{kj} \end{aligned}$$

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Donc $P_{ij}^{(2)}$ est l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice $\mathbb{P}^2$. Plus généralement

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(m)} &= P^{(m)}(i, j) = P[X_{n+m} = j | X_n = i] = P[X_m = j | X_0 = i] \\ &= \sum_{k \in E} P(k, j) P^{(m-1)}(i, k) = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(m-1)} P_{kj} \end{aligned}$$

l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}^{m-1}\mathbb{P} = \mathbb{P}\mathbb{P}^{m-1}$.

Théorème 1.1: (Chapmann-Kolmogorov)

La matrice de transition en n étapes est égale à la puissance n -ième de la matrice de transition en une étape.

Processus aléatoires, chaînes de Markov

Remarque 1.1

Avec l'intérêt des puissances m -ième de la matrice de transition via le Théorème de Chapman-Kolmogorov??, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j | X_0 = i] P[X_0 = i] \quad (4)$$

Donc en notant par μ la loi de X_0 (loi initiale de la chaîne), l'équation précédente s'écrit

$$P[X_n = j] = \sum_{i \in E} \mu_i P_{ij}^{(n)} \stackrel{\text{Déf}}{=} \mu \mathbb{P}^n(j), \quad \forall n \geq 1 \quad (5)$$

où $\mu_i = \mu(i) = P[X_0 = i]$, $\forall i \in E$. En d'autres termes $\mathcal{L}(X_n) = \mu \mathbb{P}^n$.

Chaînes de Markov, Ergodicité

Pour une chaîne de Markov homogène, il est intéressant de savoir dans quelle mesure le passé influe sur le futur. Cela revient à s'intéresser au comportement limite des $P_{ij}^{(n)}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il apparaît que pour un grand nombre de CMH, la suite $P_{ij}^{(n)}$ converge vers une limite π_j ne dépendant que de l'état j . En d'autres termes, la probabilité de se trouver à l'état j après n transitions pour n assez grand est approximativement π_j , indépendamment de l'état i de départ. On peut montrer qu'une condition suffisante pour qu'une CMH possède cette propriété est qu'il existe un entier $n > 0$ telles que

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \quad \forall (i, j) \in E^2 \quad (6)$$

Chaînes de Markov, Ergodicité

Les chaînes de Markov qui vérifient la condition (6) sont dites **ergodiques**. Or d'après le Théorème de Chapman-Kolmogorov ??

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^n P_{kj},$$

Donc lorsque $n \rightarrow +\infty$, les chaînes de Markov ergodiques vérifient $\pi_j = \sum_{k \in E} \pi_k P_{kj}$, $\forall j \in E$, c'est-à-dire

$$\pi \mathbb{P} = \pi \tag{7}$$

Comme $\sum_{j \in E} P_{ij}^n = 1$, on a aussi $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$.

Chaînes de Markov, ergodicité

Les résultats précédent sont rassemblés dans le théorème suivant

Théorème 1.2: (Ergodique)

Pour toute chaîne de Markov ergodique $\pi_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}^n$ existe et les π_j sont les seules solutions non négatives du système d'équation

$$\begin{cases} \pi = \pi \mathbb{P} \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \end{cases} \quad (8)$$

π est dite loi stationnaire de la chaîne de Markov.

Chaînes de Markov, ergodicité

Remarque 1.2

L'étude de la convergence des P_{ij}^n ou d'une manière équivalente, de la matrice $\mathbb{P}^n$ revient à étudier le comportement des valeurs propres de $\mathbb{P}$. En effet $\mathbb{P}$ est semblable à une matrice diagonale ou triangulaire. Donc si $\mathbb{P}$ a une valeur propre λ avec $|\lambda| > 1$, la matrice $\mathbb{P}^n$ ne converge pas. On notera que 1 est valeur propre (vp) triviale de $\mathbb{P}$. La chaîne est donc ergodique si et ssi toutes les valeurs propres de $\mathbb{P}$ sont à l'intérieur du cercle unité.

Chaînes de Markov ergodiques

Exemple 1

Soit la chaîne dont la matrice de transition est $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice semblable à $\mathbb{P}$ est $\mathbb{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc les valeurs propres sont toutes de module 1. $\mathbb{P}^n$ ne peut donc converger et la chaîne n'est pas ergodique. On a d'ailleurs $\mathbb{P}^{2n} = I$ et $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}$.

2) Soit une chaîne à 4 états 1, 2, 3, et 4, dont la matrice de transition est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chaînes de Markov ergodiques

Exemple 1 suite

$$\text{Alors } \mathbb{P} = Q\mathbb{P}'Q^{-1} \text{ avec } \mathbb{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \text{ On a donc}$$

$$\mathbb{P}^n = Q\mathbb{P}'^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaînes de Markov ergodiques

Exemple 1 suite

Par conséquent

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interprétation :

Si la chaîne se trouve initialement à l'une des extrémités du segment $[1, 4]$, elle y reste presque sûrement. Si elle se trouve à l'état 2, elle a deux chances sur trois d'aboutir tôt ou tard à l'état 1, et une chance sur trois d'aboutir à l'état extrémité 4. Par contre, elle n'a aucune chance de se stabiliser en un état intermédiaire. On a un résultat analogue si le point de départ est l'état 3.

Chaînes de Markov ergodiques

Interprétation suite :

On peut aussi dire que la chaîne est attirée par les extrémités absorbantes 1 et 4, qu'elle finit toujours par rejoindre. Elle a naturellement plus de chance d'aboutir à l'extrémité la plus proche de sa position initiale.

Exemple 2

Soit une chaîne de Markov à trois états 1, 2 et 3, dont la matrice de transitions est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

La diagonalisation de $\mathbb{P}$ donne comme valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{5}$. La matrice de passage Q et son inverse sont données par :

Chaînes de Markov ergodiques

Exemple 2 suite

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{18} & \frac{3}{18} & \frac{-5}{18} \\ \frac{-4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q \mathbb{P}'^n Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Chaînes de Markov ergodiques

Exemple 2, interprétation

La chaîne en question comporte trois éventualités. Notons les E_1 , E_2 et E_3 .

Lorsque la chaîne est en E_1 elle a les probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$ de rester en E_1 ou d'aller à E_2 ou à E_3 respectivement, etc.

Lorsque la chaîne fait un grand nombre n de transitions à partir d'un instant k , les probabilités que la chaîne soit en E_1 , E_2 et E_3 respectivement à l'instant $n + k$, sont lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$ respectivement. Ces probabilités sont bien indépendantes des états de départ à l'instant k considéré.

Chaînes de Markov continues

On dit que $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène continue si en plus d'avoir les propriétés de Markov homogène précédentes, les X_n sont des variables aléatoires réelles continues et de même loi admettant une densité de probabilité notée $f(x)$. La loi de probabilité conditionnelle de X_{n+k} sachant $X_n = x$ admet donc une densité $f^{(k)}(y|x)$ indépendante de n . Enfin la loi conditionnelle de X_{n+k} ($k \geq 1$) sachant les valeurs prise par les X_i , $i \leq n$ dépend uniquement de la valeur récente prise par X_n . La loi du couple (X_n, X_{n+k}) est alors définie par sa densité

$$f^{(k)}(y|x)f(x). \quad (9)$$

De même par la règle de la multiplication, celle du triplet $(X_n, X_{n+k}, X_{n+k+m})$ est définie par la densité

$$f^{(m)}(z|y)f^{(k)}(y|x)f(x). \quad (10)$$

Chaînes de Markov continues

Il en résulte que la loi conditionnelle de X_{n+k+m} sachant $X_n = x$ est donnée par

$$f^{(k+m)}(z|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(z|y) f^{(k)}(y|x) dy. \quad (11)$$

En particulier $f^{(1)}(y|x) = f(y|x)$ est la densité (ou noyau) de transition de x à y en une étape et plus généralement

$$f^{(n+1)}(z|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(y|x) f(z|y) dy. \quad (12)$$

Exemple

Supposons que le passage de X_n à X_{n+1} suive une loi normale et que chacun des X_n obéisse à une loi normale réduite.

Chaînes de Markov continues

Posons

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-rx)^2}{1-r^2}}.$$

Cherchons $f^{(k)}(z|x)$. On a d'abord

$$f^{(2)}(z|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z|y)f(y|x)dy = \frac{1}{2\pi(1-r^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-rx)^2 + (z-ry)^2}{1-r^2}} dy.$$

On obtient avec les résultats sur l'intégrale de Gauss

$$f^{(2)}(z|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-r^2x)^2}{1-r^2}}.$$

Chaînes de Markov continues

On établit enfin par récurrence sur n que $f^{(n)}(z|x)$ s'obtient en remplaçant r par r^n dans l'expression de $f(z|x)$, r étant le coefficient de corrélation entre X_n et X_{n+1} . Si $|r| < 1$, $r^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc

$$f^{(n)}(z|x) \rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

On retrouve la propriété ergodique étudiée dans le cas discret, mais cette propriété ergodique n'est pas assurée si $r = \pm 1$.

Si $r = 1$ par exemple, $f^{(n)}(z|x)$ ne dépend plus de n . Dans ce cas, on $X_{n+1} = X_n$ presque sûrement. X_1 est aléatoire mais son choix étant fait, les X_n successifs sont bien déterminés. De même si $r = -1$, on a $X_2 = -X_1$, $X_3 = X_1$, $X_4 = -X_1$, etc.