

Phy 208 “Introduction à la Physique Quantique”

Problèmes sur les paquets d’ondes

Problème 1

Une particule se déplaçant sur l’axe (Ox) est décrite par la fonction d’onde

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta^2}\right).$$

1. On considère les intégrales $I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx$. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{2n} et I_{2n+2} . Calculer I_0 , I_2 et I_{2n+1} .
2. En déduire que $\Psi(x)$ est normée.
3. On admet que dans l’espace des impulsions, la fonction d’onde est décrite par

$$\bar{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right) dx.$$

- (a) Montrer que

$$\bar{\Psi}(p) = \left(\frac{2\Delta^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{p^2\Delta^2}{\hbar^2}\right)$$

et que $\bar{\Psi}(p)$ est normée.

- (b) Calculer Δx , l’incertitude sur la mesure de x .
- (c) Calculer Δp , l’incertitude sur la mesure de p .
- (d) Que vaut le produit des incertitudes $\Delta x \cdot \Delta p$? Conclure.

Problème 2

On considère la fonction d’onde :

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

1. Montrer que $\Psi(x)$ est normalisée et calculer Δx .
2. On admet que dans l’espace des impulsions, la fonction d’onde est décrite par la transformée de Fourier donnée par

$$\bar{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left(-i\frac{px}{\hbar}\right) dx.$$

- (a) Calculer $\bar{\Psi}(p)$
- (b) Calculer Δp .

Problème 3

On considère le paquet d'ondes

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

où $\bar{\Psi}(k)$ et $\omega(k)$ sont fonctions de k .

1. En utilisant le développement de $\omega(k)$ en k_0 en se limitant au premier ordre, montrer que le paquet d'ondes $\Psi(x, t)$ peut s'écrire comme le produit d'une onde plane moyenne modulée par une fonction enveloppe qui se déplace à la vitesse de groupe $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$.
2. Montrer que les termes d'ordre supérieur du développement sont responsable de l'étalement du paquet d'ondes au cours du temps.

Problème 4

1. On considère une particule libre unidimensionnelle. Montrer que l'onde plane :

$$\varphi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)},$$

est solution de l'équation de Schrödinger et en déduire la relation de dispersion $\omega(k)$. Quelle est la vitesse de groupe ?

2. On considère maintenant une superposition d'ondes planes :

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{a^2}{4} (k - k_0)^2 \right] e^{i(kx - \omega t)} dk$$

- (a) Montrer que $\psi(x, t)$ est également solution de l'équation de Schrödinger.
- (b) Montrer que $\psi(x, 0)$ est normalisée.
- (c) Calculer l'incertitude sur la position Δx à la date $t = 0$.
- (d) Donner l'allure du graphe de $|\psi(x, 0)|^2$.

Problème 5 : Étalement du paquet d'ondes gaussien

- (i) Soit le paquet d'ondes gaussien suivant, défini sur l'axe des x , associé à $t = 0$, à une particule libre de masse m :

$$\psi(x, 0) = A e^{ik_0 x} e^{-x^2/a^2} \quad \text{avec } A \text{ et } a \text{ supposés réels.}$$

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, déterminer pour cette particule, à $t = 0$, les densités de probabilités $\pi(x, 0)$ et $\pi(k)$ relatives à la variable x et à la variable k . Vérifier l'égalité : $\Delta x(0) \Delta k = \frac{1}{2}$.

- (ii) (a) Déterminer la forme du paquet d'ondes à $t \neq 0$ sous la forme

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\sigma(t)}} \times e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \times \exp \left\{ -\frac{(x - v_0 t)^2}{a^2 \sigma(t)} \right\}$$

où $\omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$, $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$ et $\sigma(t)$ est une fonction complexe de la variable t à déterminer.

- (b) Déterminer la densité de probabilité $\pi(x, t)$ ainsi que la dispersion spatiale $\Delta x(t)$ de la particule à l'instant $t > 0$. Dédire que la dispersion $\Delta x(t)$ est une fonction croissante du temps.

On utilisera les résultats mathématiques suivants :

- i) Dans le cas particulier d'une gaussienne $g(x)$ centrée en $x = 0$, l'écart quadratique moyen Δx s'obtient par la relation :

$$g(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{e}} g(0)$$

- ii) On a

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha u^2 + \beta u)} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/4\alpha}$$

si α, β complexes, mais $\text{Re}\alpha > 0$, et, en particulier :

$$I(1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} .$$