

Sommaire

- 1 Variables aléatoires – lois de probabilité.
 - Inégalités fondamentales
 - Lois multivariées

- fonctions caractéristiques
- Formule de changement de variables
- Indépendance de variables aléatoires

Variables aléatoires

Dans une expérience aléatoire, il est possible de faciliter la description d'un évènement A en lui associant une fonction X qui prend une valeur aléatoire x si et seulement si l'évènement A se produit.

Définition 1.1: variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace probabilisable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ telle que, pour tout évènement $B \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

En particulier $\mathcal{X} = X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles prises par la variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Variables aléatoires

Lorsque :

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, X est dite variable aléatoire réelle (v.a.r.),
- $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, X est un n -uplet de v.a.r. dit vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{X} = E$ espace vectoriel quelconque, X est dit vecteur aléatoire,
- $\mathcal{X} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou D avec D dénombrable, X est dite variable aléatoire réelle discrète.

Notons que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \stackrel{\text{notation}}{=} \{X \in B\}.$$

Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$ ou $]a, b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(]a, b[) &= \{a < X < b\} \\ X^{-1}(]-\infty, x]) &= \{X \leq x\} \\ X^{-1}(\{x\}) &= \{X = x\} \end{aligned}$$

Variables aléatoires

NB : Toutes les opérations sur les fonctions sont valables pour les variables aléatoires.

Exemple 1.1:

- ❶ Soit $A \in \mathcal{A}$. On définit la fonction indicatrice de A notée I_A par

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors I_A est une v.a.r.

- ❷ Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ une v.a. et $f : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique mesurable. Alors $Y = f(X) = f \circ X$ est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Loi de probabilité

Définition 1.2: Loi de probabilité, fonction de répartition d'une v.a.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ une v.a.

- ① On appelle loi de probabilité de la v.a. X , la probabilité P_X image de P par X définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}, P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[X \in B].$$

- ② Dans le cas où X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on appelle fonction de répartition (f.r.) de X (ou de la loi de X), la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X \in]-\infty, x]) = P[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1: Propriétés immédiates

On vérifie que F_X caractérise la loi de la v.a.r. X et a les propriétés suivantes :

- ❶ F_X est croissante.
- ❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- ❸ F_X est continue à droite, c'est-à-dire $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement si une fonction réelle F sur $\mathbb{R}$ vérifie les trois propriétés ci-dessus, il existe une v.a.r. X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi a pour f.r. F .

Autres propriétés de F_X

- Si F_X est continue, donc strictement croissante, la loi de X est dite continue ou diffuse, ce qui est équivalent à $P[X = x] = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- S'il existe une fonction positive f ayant un nombre fini de points de discontinuité telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

alors on dit que X ou la loi de X est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$) admettant f pour densité de probabilité.

Notons que la densité de probabilité joue le même rôle que la probabilité élémentaire $P_x = P[X = x]$ dans le cas X discrète, mais $f \not\leq 1$ en général.

Réciproquement si g est une fonction positive et si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$, alors g est la densité de probabilité d'une v.a.r. dont la fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ est G définie par $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$.

Théorème 1.1

Si X est une v.a.r. continue, ayant pour densité de probabilité f alors

- ① $P[X = x] = 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- ② $P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = \int_a^b f(t) dt, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

La v.a.r. X étant continue, les inégalités peuvent être remplacées par des inégalités strictes.

Moments d'une v.a.r.

Définition 1.3: Moment d'une v.a.

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- ① On appelle espérance mathématique de X lorsqu'elle existe, la quantité réelle notée $E(X)$ ou $\overline{X}$ et donnée par

$$\overline{X} = E(X) = \int_{\Omega} X \, dP.$$

- ② Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre k de X lorsqu'il existe, la quantité réelle notées $m_k(X)$ et donnée par

$$m_k(X) = E(X^k) = \int_{\Omega} X^k \, dP.$$

Moments d'une v.a.r.

Définition 1.4: Moment d'une v.a.

- ① On appelle variance (respectivement moment centré d'ordre $k \geq 1$) de X notée $Var(X)$ ou σ_X^2 (respectivement $\mu_k(X)$) lorsqu'ils existent, les quantités réels donnés par

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 dP,$$

$$\mu_k(X) = E(X - E(X))^k = \int_{\Omega} (X - E(X))^k dP.$$

- ② On appelle écart-type de X , le réel noté $\sigma_X \in \mathbb{R}^+$ donné par $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

Moments d'une v.a.r.

Notons que par linéarité de l'opérateur $E(.) = \int_{\Omega} . dP$, on a

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

On a le résultat suivant permettant de calculer facilement l'espérance d'une fonction de la v.a.r. X :

Théorème 1.2: (de transfert)

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $g(X)$ est P -intégrale si, et seulement si, g est P_X -intégrable et on a dans ce cas

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dP_X(x).$$

Moments d'une v.a.r.

Remarque 1.2

- ❶ Si la loi P_X de X est absolument continue, admettant pour densité de probabilité f , alors $dP_X(x) = f(x)dx$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dP_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

- ❷ On dit que X a un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ ou une espérance mathématique (cas $p = 1$), si $E(|X|^p) < +\infty$. On écrit $X \in L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Inégalité fondamentales

Théorème 1.3: (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a.r. telle que $|X|^r \in L^1$, $r > 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, P[|X| > \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E(|X|^r).$$

Corollaire 1.1: (Inégalité de Bienamey-Tchebyshev)

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $\forall \varepsilon > 0, P[|X - E(X)| > \varepsilon] \leq \frac{\text{var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Lois multivariées

Les définitions et résultats précédents se généralisent au cas de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^n$. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un v.a. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5: Loi d'un v.a., fonction de répartition

On appelle fonction de répartition du v.a. X , la fonction F_X sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n], \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

F_X détermine la loi de probabilité de X dite loi conjointe du n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$.

Lois multivariées

Définition 1.6: Loi d'un v.a., loi marginale, absolue continuité

- 1) On appelle loi marginale de la v.a.r. X_i du n -uplet, la loi de fonction de répartition

$$F_{X_i}(x) = \lim_{\substack{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rightarrow +\infty \\ x_i \rightarrow x}} F_X(x_1, \dots, x_n).$$

- 2) La loi du v.a. X est dite absolument continue s'il existe une fonction positive f sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Lois multivariées

Définition 1.7: Loi d'un v.a., densité de probabilité

S'il en est ainsi, on dit que la v.a. X a pour densité

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

On appelle densité marginale du p -uplet $(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$ extrait d'un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$, $1 \leq p \leq n$, la fonction

$$f_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, u_{i_{p+1}}, \dots, u_{i_n}) du_{i_{p+1}} \cdots du_{i_n}.$$

Lois multivariées

Exemple

- Soit (X, Y) un couple de *v.a.r.* de fonction de répartition conjointe

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors les lois marginales de X et de Y ont pour fonction de répartition

$$F_X(x) = (1 - e^{-x})\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad \text{et} \quad F_Y(y) = (1 - e^{-y})\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

Lois multivariées

Exemple suite

La densité conjointe est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et les densités marginales de X et Y sont données par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy = e^{-x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) = F'_X(x)$$

et

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dx = e^{-y} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y) = F'_Y(y).$$

Théorème 1.4

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un v.a. dans $\mathbb{R}^n$ admettant pour densité f_X et si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors

$$P[X = (X_1, \dots, X_n) \in A] = \int_{\{(x_1, \dots, x_n) \in A\}} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Corollaire 1.2

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un v.a. dans $\mathbb{R}^n$ admettant pour densité f_X et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive ou bornée, alors

$$\begin{aligned} E[g(X_1, \dots, X_n)] &= \int_{\Omega} g(X_1, \dots, X_n) dP \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Définition 1.8: Covariance, corrélation linéaire

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un v.a. de $\mathbb{R}^n$. Alors l'espérance mathématique de X est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_n))'$$

où prime désigne la transposé d'un vecteur ou d'une matrice.

- Pour $n = 2$, on appelle covariance du couple (X, Y) le nombre noté $Cov(X, Y)$ ou σ_{XY} donné par

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- On appelle coefficient de corrélation de X et Y , le nombre noté r_{XY} ou ρ_{XY}

Définition 1.9: matrice de covariance

donné par

$$r_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_Y}.$$

- On appelle matrice de covariance du v.a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice carrée d'ordre n notée Σ_X appelée aussi matrice var-covar ou matrice de dispersion de X donnée par

$$\Sigma_X = [\sigma_{i,j}] \quad \text{avec} \quad \sigma_{i,j} = Cov(X_i, X_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Remarque 1.3

- On démontre que

$$-1 \leq R_{XY} \leq 1.$$

Par conséquent $\exists \theta \in [0, \pi]$ tels que $R_{XY} = \cos \theta$. On vérifie aussi que

- Σ_X est une matrice symétrique et positive :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, a' \Sigma_X a \geq 0$$

et invariante par translation par un vecteur constant :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \Sigma_{X+a} = \Sigma_X.$$

- si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $Y = MX$ alors

$$E(Y) = ME(X) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \Sigma_Y = M\Sigma_X M' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

Définition 1.10: Fonctions caractéristiques

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un v.a. de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

- On appelle fonction caractéristique du v.a. X , la fonction sur $\mathbb{R}^n$, $t \mapsto \Phi_X(t)$ donnée par

$$\Phi_X(t) = E[e^{i\langle t, X \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} dP_X(x)$$

où pour tous $n \geq 1$, pour tous $t, x \in \mathbb{R}^n$, $\langle t, x \rangle = \sum_{i=1}^n t_i x_i$ désigne le produit scalaire canonique des vecteurs x et t de $\mathbb{R}^n$.

- Lorsque X est une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice G_X de X par

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P[X = k], \quad \forall s \in [-1, 1].$$

Remarque 1.4

- Si la loi de X a une densité de probabilité f_X , $dP_X(x) = f_X(x)dx$.
- Si X est une v.a.r.d., $dP_X(x) = P[X = x]$ et l'intégrale est une somme.

Théorème 1.5: Propriétés

1) La fonction caractéristique $\Phi_X(t)$ caractérise la loi de la v.a. X :

$$\Phi_X(t) = \Phi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}$$

2) Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$, on a $\Phi_{aX+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \Phi_X(at)$.

3) Si X est une v.a.r. (cas $n = 1$) et si $|X|^p \in L^1$, alors Φ_X est de classe C^p et pour k , $1 \leq k \leq p$ on a

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$$

Théorème 1.6: (Formule d'inversion)

Soit X est une v.a.r. telle que $\Phi_X(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la loi de X est absolument continue admettant pour densité de probabilité donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \Phi_X(t) dt.$$

Changement de variables

En calculs de probabilités on est dès fois amené à effectuer un changement de variables. Le théorème suivant permet de d'en déterminer la loi.

Théorème 1.7: (Formule de changement de variable)

Soit $\mathcal{D}$ et Δ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et φ un C^1 -difféomorphisme de $\mathcal{D}$ sur Δ . Alors pour toute fonction borélienne positive ou intégrable g sur Δ on a

$$\int_{\Delta} g(y) \, dy = \int_{\mathcal{D}} g(\varphi(x)) |J\varphi(x)| \, dx \quad (1)$$

où $J\varphi(x)$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne de $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Cas des variables aléatoires

Soit X un v.a. à valeurs dans un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ ayant une densité f_X et soit ψ un C^1 -difféomorphisme de l'ouvert $\mathcal{D}$ dans un ouvert Δ de $\mathbb{R}^n$. On pose $Y = \psi(X)$ et on cherche la loi de Y . On a

pour toute fonction positive g quelconque sur Δ :

$$\begin{aligned} E(g(Y)) &= E(g(\psi(X))) = \int_{\Omega} g(\psi(X)) \, dP = \int_{\mathcal{D}} g(\psi(x)) f_X(x) \, dx \\ &= \int_{\Delta} g(y) f_X(\psi^{-1}(y)) |J\psi^{-1}(y)| \, dy \\ &= \int_{\Delta} g(y) f_X(\psi^{-1}(y)) |J\psi^{-1}(y)| \mathbb{I}_{\Delta}(y) \, dy. \end{aligned}$$

On en déduit que la v.a. Y a pour loi de densité donnée par

$$f_Y(y) = f_X(\psi^{-1}(y)) |J\psi^{-1}(y)| \mathbb{I}_{\Delta}(y).$$

Exemple

Exemple

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de v.a.r. de loi conjointe sur $\mathbb{R}^2$ définie par sa densité $f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$. On pose $Y = \frac{X_1}{X_2}$ avec $Y = 0$ si $X_2 = 0$. cherchons la loi de Y .

Pour toute g positive sur $\mathbb{R}$ on a

$$E(g(Y)) = E\left[g\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x_1}{x_2}\right) e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Soit le difféomorphisme $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ qui à (x_1, x_2) associe (y, z) avec $y = \frac{x_1}{x_2}$ et $z = x_2$. Alors ψ^{-1} est le difféomorphisme réciproque qui à (y, z) associe $x_1 = yz$, $x_2 = z$.

Exemple suite

On a $J\psi^{-1}(y, z) = \frac{D(x_1, x_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} z & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z$. D'où

$$\begin{aligned} E(g(Y)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-\frac{1}{2}(1+y^2)z^2} |z| dy dz \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(1+y^2)z^2} |z| dy dz \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{dy}{\pi(1+y^2)}. \end{aligned}$$

La loi de Y est donc la loi de densité $f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Indépendance des variables aléatoires

Notons par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ (tribu engendrée par les boréliens de $\mathbb{R}^n$).

Définition 1.11: Indépendance des variables aléatoires

- ① Soit (X, Y) un couple de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.
On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp Y$ si

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A]P[Y \in B], \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

- ② On dit que les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ sont (mutuellement) indépendantes et on note $X_1, \dots, X_n \perp$ si pour tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P[X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n] = P[X_1 \in A_1] \cdots P[X_n \in A_n]. \quad (2)$$

Indépendance des variables aléatoires

Définition 1.12: Indépendance des variables aléatoires

- ① On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. indépendante si (2) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- ② On dit que les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) si elles sont (mutuellement) indépendantes et elles sont toutes de même loi.

Remarque 1.5

- Le fait que les X_i soient indépendantes deux à deux ($X_i \perp X_j \forall i \neq j$) n'implique pas que les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. En revanche, l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
- Si X et Y sont deux v.a. indépendantes on a $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ou encore $E(XY) = E(X)E(Y)$. Mais la réciproque est fausse. Notons que si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que les v.a. X et Y sont non corrélées ou sont orthogonales.
- Les transformations mesurables préservent l'indépendance : si $X \perp Y$, alors $f(X) \perp g(Y)$, quelles que soient les fonctions boréliennes f et g .

Indépendance des variables aléatoires

Proposition 1.1: (Critères)

1- **Critère des fonctions de répartitions** : Les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si,

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

2- **Critère des fonctions des densités** : Si les n v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ont pour densités $f_1, \dots, f_n$ respectivement alors $(X_1, \dots, X_n) \perp$ si et seulement si, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (4)$$

Indépendance des variables aléatoires

Proposition 1.2: (Critères suite)

3- **Critère des espérances** : Les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont indépendantes si et ssi, pour toutes fonctions réelles ou complexes positives ou bornées $h_1, \dots, h_n$

$$E(\Pi_{i=1}^n h_i(X_i)) = \Pi_{i=1}^n E(h_i(X_i)). \quad (5)$$

4- **Critère des fonctions caractéristiques** : Soient $\Phi_{X_1}, \dots, \Phi_{X_n}$ les fonctions caractéristiques respectives des v.a.r. $X_1, \dots, X_n$. Alors $(X_1, \dots, X_n)$ indépendante si et seulement si, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \Pi_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t_i). \quad (6)$$

Indépendance des variables aléatoires

Proposition 1.3: (Loi d'une somme de v.a.r.)

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes alors la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est égale au produit de convolution des lois des X_i :

$$P_{X_1 + \dots + X_n} = P_{X_1} * P_{X_2} * \dots * P_{X_n}.$$

En particulier si les X_i ont des densités f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ et si les X_i sont mutuellement indépendante alors

$$f_{S_n} = f_1 * f_2 * \dots * f_n.$$

Indépendance des variables aléatoires

Notons que par définition, la convolution $*$ de deux fonctions f et g positives ou intégrables est définie par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)dt.$$

Cette loi $*$ est commutative et associative. La proposition précédente dit que si X et Y sont deux v.a.r. admettant pour densités f_X et f_Y respectivement, et si X et Y sont indépendantes, alors la loi de la v.a.r. $S = X + Y$ a pour densité de probabilité

$$f_S(x) == \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x - t)dt.$$