

Sommaire

1 Lois de probabilités usuelles

- Lois discrètes courantes
- Lois continues courantes

Lois discrètes courantes

Définition 1.1: Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$

On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , $0 < p < 1$ et on note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ si

$$\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et on a} \quad P[X = 1] = p \text{ et } P[X = 0] = q = 1 - p.$$

On vérifie que $E(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p) = pq$ et $\Phi_X(t) = q + pe^{it}$.

La loi de Bernoulli est utilisée pour modéliser des expériences ayant seulement deux résultats possibles, en particulier des situations classifiées en échec ($X = 0$) ou succès ($X = 1$).

Lois discrètes courantes

Définition 1.2: Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

On dit qu'une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres n et p , $0 < p < 1$ et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ si

$\mathcal{X} = X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et on a $P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$, $\forall k = 0, 1, \dots, n$.

On vérifie que $E(X) = np$, $Var(X) = npq$ et $\Phi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.

La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ modélise la loi du nombre de succès parmi n expériences i.i.d. de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

Lois discrètes courantes

Définition 1.3: Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

On vérifie que $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$ et $\Phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

La loi de Poisson est une sorte de loi binomiale pour laquelle n est assez grand, p petite voisine de 0 et np voisin de λ .

Lois discrètes courantes

Définition 1.4: Loi de Pascal de paramètre $p : \mathcal{G}(p)$

Une v.a. X suit une loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p , $0 < p < 1$ et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$P[X = k] = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}.$$

$$\text{On a } E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{et} \quad \Phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

La loi géométrique peut être définie sur $\mathbb{N}$. Dans ce cas la v.a. X est par exemple le nombre d'échecs nécessaires pour obtenir pour la première fois un succès.

Lois discrètes courantes

Définition 1.5: Loi binomiale négative de paramètres n et p :
 $\mathcal{BN}(n, p)$

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p , $0 < p < 1$, si $X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\}$ et $\forall k \geq n$,

$$P[X = k] = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = C_{n+k-1}^{n-1} p^n (1-p)^k \mathbb{I}_{\{k \geq 0\}}.$$

Notons qu'on peut écrire $X = \sum_{i=1}^n \zeta_i$ avec ζ_i , $i = 1, \dots, n$ i.i.d. avec $\zeta_1 \sim \mathcal{G}(p)$

Lois discrètes courantes

Définition 1.6: Loi Hypergéométrique de paramètres N, M, n :
 $\mathcal{H}(N, M, n)$

Une v.a. X suit une loi hypergéométrique de paramètres N , M et n si $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \leq N$ et $\forall k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Notons que parfois les paramètres sont N, n, p où $p = \frac{M}{N}$. On a $E(X) = np$ et $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}npq$, avec $q = 1 - p$.

Lois continues courantes

Définition 1.7: Loi uniforme sur $[a, b]$: $\mathcal{U}[a, b]$

Une v.a.r. X est dite suivre une loi uniforme sur $[0, 1]$ ou simplement une loi uniforme, si X est continue et a pour densité

$$f_X(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } E(X) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{12} \text{ et } \Phi_X(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Lois continues courantes

Définition 1.8: Loi uniforme sur $[a, b]$: $\mathcal{U}[a, b]$ suite

Plus généralement, on dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si la v.a. $U = \frac{X - a}{b - a}$ suit la loi $\mathcal{U}[0, 1]$. On en déduit que

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a} \mathbb{I}_{[a, b]}(x), \quad E(X) = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Notons que si $\Phi_X(t)$ est la f.c. d'une v.a.r. X alors $Y = aX + b$ a pour f.c. $\Phi_Y(t) = e^{itb} \Phi_X(at)$.

Lois continues courantes

Définition 1.9: Loi normale de moyenne m et d'écart-type σ : $\mathcal{N}(m, \sigma)$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si X est continue et admet pour densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La courbe représentative de $f_X(x)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$.

Dans le cas particulier $m = 0$ et $\sigma = 1$, la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée loi normale centrée réduite ou loi de Laplace-Gauss.

Lois continues courantes

Définition 1.10: Loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Sa densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\Phi(x)$ la f.r. de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$. On a par symétrie de la CR de $\Phi(x)$: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$. Donc si $u_\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie $\Phi(u_\alpha) = \alpha \in [0, 1]$, on a en valeur absolue $u_\alpha = u_{1-\alpha}$. Notons que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ si et ssi,

$U = \frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ou encore si et ssi $X = \sigma U + m$ avec $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. D'où $E(X) = m$ et $\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \sigma^2$.

Lois continues courantes

Définition 1.11: Loi log-normale de paramètres m et σ : $\mathcal{LN}(m, \sigma)$

$X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma)$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si $Y = \log(X)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
 X admet pour densité de probabilité

$$f_X(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2 (\log(\lambda t))^2}{2}}$$

avec $m = -\log(\lambda)$ et $\sigma = \frac{1}{\alpha}$.

Lois continues courantes

Définition 1.12: Loi gamma de paramètres p et $\theta : \gamma(p, \theta)$

X suit une loi de gamma de paramètres $p > 0$ et $\theta > 0$ et on note $X \sim \gamma(p, \theta)$, si X est continue et a pour densité

$$f_X(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, $\forall s > 0$. On a

$$E(X) = \frac{p}{\theta}, \quad Var(X) = \frac{p}{\theta^2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad E(X^k) = \frac{\Gamma(p+k)}{\theta^k \Gamma(p)}.$$

Lois continues courantes

Définition 1.13: Loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$: $\mathcal{E}(\theta)$

Dans le cas particulier $p = 1$, la loi $\gamma(1, \theta)$ est appelée loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ notée $\mathcal{E}(\theta)$. $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ si X est continue et a pour densité

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

$$E(X) = \frac{1}{\theta}, \quad \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2} \quad \text{et} \quad \Phi_X(t) = \frac{\theta}{\theta - it}.$$

Lois continues courantes

Définition 1.14: Loi de Weibull de paramètres λ et $\alpha : \mathcal{W}(\lambda, \alpha)$

X suit une loi de Weibull de paramètres $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ et on note $X \sim \mathcal{W}(\lambda, \alpha)$, si X est continue et a pour densité

$$f_X(t) = \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

On a

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \frac{1}{\lambda^2} (\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}))^2.$$

Notons que pour $\alpha = 1$, la loi $\mathcal{W}(\lambda, 1)$ est identique à la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et que les lois gamma, exponentielle et de Weibull servent à modéliser les durées.

Lois continues courantes

Définition 1.15: Loi de Cauchy de paramètres a et b : $\text{Cauchy}(a, b)$

$X \rightsquigarrow \text{Cauchy}(a, b)$ si X est continue et a pour densité

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x - a)^2)}.$$

Les cas $a = 0$ et $b = 1$ sont les plus courants. Comme on le voit bien, la loi de Cauchy n'a aucun moment. On a

$$\Phi_X(t) = e^{-|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lois continues courantes

Définition 1.16: Loi de Chi-carré à ν d.d.l. : χ_ν^2

$X \sim \chi_\nu^2$ si $X = \sum_{i=1}^{\nu} U_i^2$ avec $U_1, \dots, U_\nu$ iid $\mathcal{N}(0, 1)$. On peut prouver aussi que X a la loi $\gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$ et donc que

$$E(X) = \nu, \quad Var(X) = 2\nu.$$

Lois continues courantes

Définition 1.17: Loi de Student à ν d.d.l. : $ST(\nu)$

$X \rightsquigarrow ST(\nu)$ si $X = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$ avec $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et U indépendante de χ_ν^2 . On a

$$E(X) = 0.$$

Lois continues courantes

Définition 1.18: Loi de Fisher-Snedecor à ν_1 et ν_2 d.d.l. : $F(\nu_1, \nu_2)$

$$X \rightsquigarrow F(\nu_1, \nu_2) \text{ si } X = \frac{\chi_{\nu_1}^2 / \nu_1}{\chi_{\nu_2}^2 / \nu_2}.$$

On démontre que si $X \rightsquigarrow F(\nu_1, \nu_2)$ alors $Y = \frac{1}{X} \rightsquigarrow F(\nu_2, \nu_1)$.

On notera que les lois de Chi-carré, de Student et de Fisher-Snedecor sont de la famille des lois normales et elles sont toutes tabulées.

Loi dégénérée

Définition 1.19: Loi dégénérée ou loi de Dirac en x_0 : δ_{x_0}

$X \rightsquigarrow \delta_{x_0}$ si $P[X = x_0] = 1$.

On a

$$\Phi_X(t) = e^{-itx_0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$