

Yaogan MENSAH

**Les p -formes et leurs applications aux courbes et
surfaces**

Document de base
Version 0.6 (11 May 2020)

Table des matières

1	Différentielle d'une fonction	2
2	Exercices	2
3	Dérivation itérée-Théorème de Schwarz	3
4	Les p-formes différentielles	4
5	Dérivation extérieure	5
6	Exercices	7
7	Formes différentielles et champs de vecteurs	8
8	Paramétrisation d'une courbe et d'une surface	10
8.1	Paramétrisation d'une courbe	10
8.2	Paramétrisation d'une surface	11
9	Intégration des formes différentielles	12
9.1	Intégrale curviligne et théorème de Green	12
9.2	Intégrale surfacique et théorème de la divergence	14

1 Différentielle d'une fonction

Définition 1.1 Soit la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit (a, b) un point intérieur à D . Les dérivées partielles de f en (a, b) sont définies par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad (1)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \quad (2)$$

sous réserve que ces limites soient finies.

Remarque 1.2 Dans la pratique pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ on fixe y et on dérive par rapport à x et pour celui de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on fixe x et on dérive par rapport à y .

Remarque 1.3 Pour alléger l'écriture, on écrira souvent $\frac{\partial f}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

Définition 1.4 La différentielle (totale) de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (3)$$

La quantité df représente la variation de f lorsque x varie de dx et y varie de dy .

2 Exercices

1. Pour chacune des fonctions suivantes calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 4}$, $f(x, y) = e^{xy} + xy$, $f(x, y) = \tan(x + y)$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ pour $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$, $f(x, y, z) = \sin(xy + z^2)$.

3. A la suite d'une légère déformation le rayon d'un cône passe de 10 cm à 10,05 cm et sa hauteur passe de 5,6 cm à 5,5 cm. Déterminer approximativement la variation ΔV de son volume. (Utiliser la formule $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ lorsque $f = f(x, y)$)
4. Déterminer les fonctions $f = f(x, y)$ telles que $df = (y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy$.
5. Déterminer les fonctions $f = f(x, y, z)$ telles que $df = yzdx + xzdy + xydz$.

3 Dérivation itérée-Théorème de Schwarz

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, elle est à son tour une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. En réitérant le processus, on définit la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à x_i puis x_j notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. On définit de même $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^2 si toutes ses dérivées partielles secondes sont continues.

On n'a pas toujours $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Considérons par exemple la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (4)$$

Pour cette fonction on a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. (Vérifier!)

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour avoir l'égalité.

Théorème 3.1 (H. Schwarz) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont continues en $x = (x_1, \dots, x_n)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

Exemple 3.2 Calculer toutes les dérivées partielles secondes de $f(x, y) = \exp(x^2 y) + xy^3$.

4 Les p -formes différentielles

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $(dx_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base duale de $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ c-à-d que chaque dx_j est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ telles que $dx_j(e_i) = \delta_{ij}$. Une 1-forme différentielle ou une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$ est une expression de la forme

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \quad (5)$$

où les f_i sont des fonctions lisses (suffisamment différentiables) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Pour chaque point $a = (a_1, \cdots, a_n)$ fixé,

$$\omega(a) = f_1(a_1, \cdots, a_n) dx_1 + \cdots + f_n(a_1, \cdots, a_n) dx_n \quad (6)$$

Nous noterons $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des 1-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.1 $\omega = xy^2 dx + (x^2 + y^2) dy$ est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\omega(1, 2) = 4dx + 5dy. \quad (7)$$

On peut ajouter des 1-formes différentielles entre elles : si

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \text{ et } \eta = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$$

alors

$$\omega + \eta = (f_1 + g_1) dx_1 + \cdots + (f_n + g_n) dx_n \quad (8)$$

et si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\omega = (\alpha f_1) dx_1 + \cdots + (\alpha f_n) dx_n \quad (9)$$

Pour définir les 2-formes différentielles et plus généralement les p -formes différentielles on introduit la notion de produit extérieur. Le produit extérieur $dx_i \wedge dx_j$ est défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$dx_i \wedge dx_j(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_i^1 & v_j^1 \\ v_i^2 & v_j^2 \end{vmatrix} \quad (10)$$

où $v_1 = (v_1^1, \dots, v_n^1)$ et $v_2 = (v_1^2, \dots, v_n^2)$. L'application $dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et antisymétrique. Une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad (11)$$

où les $f_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses. L'ensemble des 2-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ sera noté $\Omega^2(\mathbb{R}^n)$.

On a les propriétés

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \text{ et } dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j. \quad (12)$$

Exemple 4.2 $\omega(x, y, z) = (x + y)dx \wedge dy + (x^2 + y + z)dy \wedge dz + y^2 dx \wedge dz$ définit une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement une p -forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (13)$$

Remarque 4.3 Les fonctions lisses $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont les 0-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.4

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2. \quad (14)$$

$$(\eta_1 + \eta_2) \wedge \omega = \eta_1 \wedge \omega + \eta_2 \wedge \omega. \quad (15)$$

ω, η_1 et η_2 étant des formes différentielles quelconques.

5 Dérivation extérieure

Soit la forme la p -forme

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \quad (16)$$

La différentielle exttérieure de ω est définie par

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} df_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (17)$$

L'application $d : \Omega^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 5.1

$$d(a\omega_1 + b\omega_2) = ad\omega_1 + bd\omega_2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(\mathbb{R}^n) \quad (18)$$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad \omega_1 \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \omega_2 \in \Omega^p(\mathbb{R}^n). \quad (19)$$

Définition 5.2 Soit ω une p -forme différentielle. on dit que ω est fermée si $d\omega = 0$. On dit que ω est exacte s'il existe une $(p-1)$ -forme différentielle α telle que $\omega = d\alpha$.

On montre que toute forme exacte est fermée. La réciproque est vraie par exemple lorsque la forme différentielle est définie sur un ouvert U étoilé ou simplement connexe. (Théorème de H. Poincaré)

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment de bornes a et x est contenu dans U .

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit simplement connexe si toute courbe fermée contenue dans U peut se ramener continûment à un point de U .

Considérons la 1- forme différentielle suivante sur $\mathbb{R}^2$

$$\omega = Pdx + Qdy \quad (20)$$

On a $d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$. Alors ω est fermée si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (21)$$

Considérons la 1-forme suivante sur $\mathbb{R}^3$.

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz. \quad (22)$$

6 Exercices

1. Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

(a) Calculer $d\omega$.

(b) Existe-t-il une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telle que $df = \omega$?

2. Soit ω la forme différentielle définie pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ par

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{xy}.$$

(a) Calculer $d\omega$.

(b) Existe-t-il une fonction f définie pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ telle que $df = \omega$?

3. Soit α une k -forme et β une p -forme sur $\mathbb{R}^n$. Comparer $\alpha \wedge \beta$ et $\beta \wedge \alpha$. En déduire que si α est de degré impaire alors $\alpha \wedge \alpha = 0$.

4. Calculer $d\omega$ pour

(a) $\omega = 2xydx + x^2dy$

(b) $\omega = x^2zdy \wedge dz + y^2zdz \wedge dx - xy^2dx \wedge dy$

(c) $\omega = 2xzd y \wedge dz + 2yzdz \wedge dx - (x^2 - y^2)dx \wedge dy$.

5. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme Ω définie par

$$\Omega(x, y) = ydx \wedge dy.$$

(a) Montrer qu'elle est fermée.

(b) Trouver toutes les formes $\omega(x, y) = P(x, y)dx$ telle que $d\omega = \Omega$.

(c) Trouver toutes les formes $\omega(x, y) = P(x, y)dy$ telle que $d\omega = \Omega$.

6. Montrer que la forme

$$\Omega = zdy \wedge dz + xdz \wedge dx + ydx \wedge dy$$

est exacte en déterminant une forme $\omega = Pdx + Qdy$ telle que $d\omega = \Omega$.

7. Montrer que la forme

$$\Omega = (3y^2z - 3xz^2)dy \wedge dz + x^2ydz \wedge dx + (z^3 - x^2z)dx \wedge dy$$

est exacte en déterminant une forme ω telle que $d\omega = \Omega$.

7 Formes différentielles et champs de vecteurs

On se place dans le cas $n = 3$.

1. Une 0-forme f est identifiée à elle-même.
2. Une 1-forme $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est identifiée au champ de vecteurs $\vec{v} = (P, Q, R)$.
3. Une 2-forme $\omega = Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge dx$ est identifiée au champs de vecteurs $\vec{v} = (Q, R, P)$.
4. Une 3-forme $\omega = Pdx \wedge dy \wedge dz$ est identifiée à la fonction P .

Proposition 7.1 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le champ de vecteurs associé à df est $\vec{\nabla} f$.

Un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$.

1. Soit la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. La différentielle de f est

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

À la différentielle de f est associée un champ de vecteur appelé *champ de gradients*, noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$ et défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \quad (23)$$

2. Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une 1-forme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. A cette forme est associé le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes (P, Q, R) .

On a

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (24)$$

Ainsi à la forme $d\omega$ est associé le champ $\overrightarrow{\text{Rot } \vec{V}}$ de composantes

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

3. Soit la 2-forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$,

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

À ω est associé le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes (P, Q, R) . On a

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

On associe à $d\omega$ la fonction $\text{div } \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}$.

4. En partant des propriétés des différentielles extérieures on peut retrouver des propriétés des champs de vecteurs.

$$d(\phi\omega) = \phi d\omega + d\phi \wedge \omega \quad (25)$$

retrouve la formule suivante lorsque ω est une forme de degré 1

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\phi \vec{V}) = \phi \overrightarrow{\text{Rot } \vec{V}} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi \wedge \vec{V} \quad (26)$$

et

$$\text{div}(\phi \vec{V}) = \phi \text{div } \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{V}. \quad (27)$$

lorsque ω est une 2-forme.

La formule

$$dd\omega = 0 \quad (28)$$

conduit à

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \overrightarrow{0}. \quad (29)$$

et

$$\text{div } \overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{V} = 0. \quad (30)$$

8 Paramétrisation d'une courbe et d'une surface

8.1 Paramétrisation d'une courbe

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

est le *support géométrique* γ et γ est une paramétrisation de $\mathcal{C}$. Une courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations. Par exemple

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (Rt, R\sqrt{1-t^2})$$

et

$$\beta : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$$

sont des paramétrisations du quart de cercle entre $(R, 0)$ et $(0, R)$.

La tangente en un point $\gamma(t_0)$ de la courbe paramétrée γ est la limite des droites joignant $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ lorsque $t \rightarrow t_0$. Plus précisément le vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tangent à γ en $\gamma(t_0)$ si

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \lambda(t)v_0 + \lambda(t)\varepsilon(t) \quad (31)$$

avec $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

La droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur v_0 est la tangente à la courbe γ en $\gamma(t_0)$.

Proposition 8.1 *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $t_0 \in I$ telle que $\gamma'(t_0) \neq 0$. Alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en $\gamma(t_0)$.*

Preuve. Considérer le dl à l'ordre 1 de γ en t_0 .

Définition 8.2 *Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe $\mathcal{C}^1$ est dite régulière si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.*

Toute courbe régulière admet une tangente en chacun de ses points. La réciproque est fausse : Considérer la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^4)$. Elle admet une tangente en $\gamma(0)$ bien que $\gamma'(0) = 0$.

La longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est par définition

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_k=b} \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \right\|, \quad (32)$$

ou le sup est pris sur toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. La formule suivante permet le calcul de la longueur d'une courbe à l'aide d'une intégrale.

Proposition 8.3 *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (33)$$

8.2 Paramétrisation d'une surface

Définition 8.4 *Soit U un ouvert connexe (un domaine) de $\mathbb{R}^2$. Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ est une application $\mathcal{C}^k$ $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

L'ensemble $S = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in U\}$ est appelé le support géométrique de φ . Une surface paramétrée $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite *régulière* en $M_0 = \varphi(u_0, v_0)$ si les vecteurs

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont libres. Dans ce cas le *plan tangent* à la surface en M_0 est le plan passant par M_0 et dirigé par les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. L'aire de la surface S est donnée par

$$\mathcal{A}(S) = \int \int_U \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv. \quad (34)$$

Exemple 8.5 Calcul l'aire du tore dont un paramétrage est

$$\varphi : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(u, v) = ((b + a \cos u) \cos v, (b + a \cos u) \sin v, a \sin u).$$

9 Intégration des formes différentielles

9.1 Intégrale curviligne et théorème de Green

Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$. (Cela revient au même de considérer le champ de vecteurs $\vec{F} = (P, Q)$) et soit $\mathcal{C}$ une courbe de paramétrage $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.

Définition 9.1 L'intégrale curviligne de ω le long de $\mathcal{C}$ est

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \quad (35)$$

Remarques 9.2 1. La formule (35) représente aussi la circulation du champ $\vec{F} = (P, Q)$. Si $\vec{F}$ est une force qui déplace un objet le long de la courbe $\mathcal{C}$ alors La formule (35) est le *travail* de $\vec{F}$.

2. Si la courbe $\mathcal{C}$ est fermée on pourra écrire (pas obligatoire) $\oint_{\mathcal{C}} \omega$ au lieu de $\int_{\mathcal{C}} \omega$.

Exemple 9.3 Soit $\omega = (x^2 + y^2)dx + 2xydy$. Evaluer $\int_{\mathcal{C}} \omega$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathcal{C} : x(t) = t, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$.
2. $\mathcal{C} : x(t) = t, y = 2t^2, 0 \leq t \leq 1$.
3. $\mathcal{C}$ est la ligne polygonale $(0, 0) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (1, 2)$.

Théorème 9.4 Soit ω une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\mathcal{C}$ une courbe de paramétrage $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$. Supposons que la forme ω soit exacte i.e il existe une fonction f telle que $\omega = df$. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = f(B) - f(A) \quad (36)$$

où $A = (x(a), y(a))$ et $B = (x(b), y(b))$.

Cette intégrale ne dépend que des extrémités de la courbe. Preuve.

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \quad (37)$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \right] dt \quad (38)$$

$$= \int_a^b f'(x(t), y(t))dt = f(B) - f(A). \quad (39)$$

Théorème 9.5 (Green) Soit $\mathcal{R}$ une région de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière $\partial\mathcal{R}$ est une courbe simple fermée lisse par morceaux. Soit $\omega = Pdx + Qdy$. Alors

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (40)$$

la courbe est parcourue de manière que la région $\mathcal{R}$ soit toujours à sa gauche.

Exercices 9.6 1. Calculer les intégrales doubles suivantes :

(a) $\int \int_D (x+y)e^{x+y} dxdy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 1 < y < 2\}.$

(b) $\int \int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

(c) $\int \int_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x+y < 1\}.$ (On pourra utiliser le changement de variables $u = x+y, v = x-y$).

2. En utilisant le théorème de Green, évaluer les intégrales suivantes, la courbe $\partial\mathcal{R}$ étant parcourue dans le sens positif (sens trigonométrique).

- (a) $\oint_{\partial\mathcal{R}} (x^2 - y^2)dx + 2xydy$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2x\}$.
- (b) $\oint_{\partial\mathcal{R}} x^2ydx + 2xydy$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.
- (c) $\oint_{\partial\mathcal{R}} 2ydx - 3xdy$, $\partial\mathcal{R}$ =cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

3. On considère la forme $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. et soit la région $\mathcal{R} = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

- (a) Calculer $\oint_{\mathcal{C}} \omega$ et $\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$
- (b) Le résultat obtenu contredit-il le théorème de Green ? A-t-on une explication ?
- (c) Remplacer la région $\mathcal{R}$ par la couronne

$$\mathcal{R}' = \{(x, y) : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et vérifier que le théorème de Green fonctionne.

9.2 Intégrale surfacique et théorème de la divergence

Définition 9.7 Soit Σ une surface dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ avec $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. On pose

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}.$$

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ contenue dans Σ . L'intégrale surfacique de f sur Σ est

$$\int \int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int \int_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv. \quad (41)$$

Notons que

$$\int \int_{\Sigma} d\sigma = \mathcal{A}(\Sigma). \quad (42)$$

Définition 9.8 Soit Σ une surface dans $\mathbb{R}^3$. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} = (P, Q, R)$ défini dans une région de $\mathbb{R}^3$ contenant Σ . L'intégrale surfacique de f sur S est

$$\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (43)$$

où en chaque point $\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant normal à la surface S .

Le théorème qui suit donne un moyen de calculer l'intégrale surfacique sur les surfaces fermées.

Théorème 9.9 (Le théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradsky) Soit Σ une surface fermée de $\mathbb{R}^3$ entourant un solide S . Soit $\vec{F} = (P, Q, R)$ un champ de vecteurs défini dans une région $\mathbb{R}^3$ contenant Σ . Alors

$$\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = \int \int \int_S \operatorname{div} \vec{F} dv. \quad (44)$$

Exercices 9.10 1. Soit Σ la partie du plan $x + y + z = 1$ telles $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Soit $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Calculer $\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$.

2. Calculer directement puis en utilisant le théorème de la divergence $\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$ où $\vec{F} = (x, y, z)$ et Σ est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. En utilisant l'intégrale surfacique, montrer que l'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$.

4. Soit la surface Σ d'équation $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'aire de Σ est :

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

5. Si dans la formule d'Ostrogradsky

$$\int \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = \int \int \int_S \operatorname{div} \vec{F} dv.$$

on prend $\vec{F} = (x, y, z)$ on obtient

$$\mathcal{V}(S) = \frac{1}{3} \int \int_{\Sigma} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \cdot \vec{d\sigma}.$$

Utiliser cette formule pour calculer le volume de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.