

Domaine : Sciences et Technologies

Parcours : Mathématiques

Code et intitulé : MTH305 - Introduction à la modélisation
mathématique : cas de l'écologie

Crédits : 4

Public cible : Licence Mathématiques

Semestre : 6

Pré-requis :

Enseignant responsable de l'UE : ATCHONOU GLO Kossi

Document de base

Table des matières

I	Introduction et généralités	4
I.1	Préambule	4
I.1.1	Modélisation et Mathématiques	4
I.1.2	Itinéraire de la modélisation mathématique	5
I.2	L'utilisation de la dérivée	5
I.3	Les problèmes de taux de variation liés	6
I.3.1	Les problèmes d'optimisation	6
I.4	La modélisation en écologie	7
II	Systèmes dynamiques continue	8
II.1	Étude d'une équation différentielle ordinaire	8
II.1.1	Définition, existence de solutions	8
II.1.2	Points d'équilibre, stabilité locale et portrait de phase	9
II.2	Deux équations différentielles ordinaires	11
II.2.1	Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre	11
II.2.2	Rappel sur les solutions d'un système linéaire en dimension 2	12
II.2.3	Typologie des systèmes planaires linéaires	14
II.2.3.1	Deux valeurs propres réelles distinctes	15
II.2.3.2	Une valeur propre réelle double	15
II.2.3.3	Deux valeurs propres conjuguées	15
II.2.4	Stabilité asymptotique, stabilité neutre, stabilité structurelle	18
II.2.5	Étude des portraits de phase planaires	19
II.3	Étude des systèmes dynamiques en temps continu	22
II.3.1	Fonctions de Liapunov	23
II.3.2	Systèmes conservatifs, intégrale première	24
II.4	Introduction à la bifurcation en dimension 2	25
II.4.1	Bifurcation selle-nœud	27
II.4.2	Bifurcation fourche	28
II.4.3	Bifurcation Verticale	28

II.4.4	Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf	28
II.4.5	Théorème de bifurcation de Hopf	29
III	Applications en dynamique des Populations	32
III.1	Modèle de dynamique d'une seule population	32
III.1.1	Modèle de croissance linéaire	32
III.1.2	Modèle de croissance logistique	33
III.1.3	L'équation de Gompertz	33
III.1.4	Modèle de croissance avec effet "Allee"	34
III.1.5	Dynamique d'une population exploitée	35
III.2	Deux populations en interaction	35
III.2.1	Modèle de lotka-Volterra	36
III.2.2	Modèle de Lotka-Volterra et croissance logistique	39
III.2.3	Modèle proie-prédateur de Holling	40
III.2.4	Modèle compétition interspécifique	41
III.3	Modèle de Communauté	42
III.3.1	Critère de Routh-Hurwitz	42
III.3.2	Modèle de communauté	43

Chapitre I

Introduction et généralités

I.1 Préambule

I.1.1 Modélisation et Mathématiques

Galilée, le père de la science moderne, a déclaré que "les mathématiques sont le langage de la nature". Il voulait dire que les phénomènes naturels peuvent se décrire par des équations et que travailler sur ces équations, c'est observer, comprendre et prévoir ces phénomènes. Les mathématiques allaient fournir une gamme d'outils pour décrire une multitude de phénomènes différents et les représenter sous forme *d'un modèle mathématique*.

Un modèle mathématique est un ensemble d'équations décrivant le mieux possible le phénomène qu'il représente. Il se situe dans la démarche scientifique classique. C'est ce qu'on appelle la mathématisation des situations concrètes.

D'abord, l'élaboration du modèle découle de l'observation objective du phénomène ; Ensuite, le modèle, une fois élaboré, doit permettre de reproduire le phénomène et d'en rendre les résultats prédictibles ; Enfin, les résultats obtenus doivent être validés et critiqués pour permettre une rétroaction afin d'améliorer ou de préciser les limites du modèle.

Les étapes de la modélisation correspondent aux étapes classiques de toute démarche scientifique : observation, hypothèse, analyse, validation. Si cette démarche a d'abord été proposée par Galilée, elle a été précisée quelques années après par Descartes et, surnommée la "méthode cartésienne", elle a été à la base du développement des sciences modernes. Voici comment Bruno Jarrosson, dans *Invitation à la philosophie des sciences*, décrit et commente cette méthode.

" Descartes définit une méthode en quatre points pour rechercher la vérité :

- douter jusqu'à ce qu'une évidence puisse sortir de ce doute : ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je la connusse évidemment être telle ;
- diviser les difficultés autant qu'il est possible : diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. Cette étape postule que le tout est la somme des parties, ce qui constitue sans doute l'une des limites de la méthode cartésienne. Il s'agit d'une méthode inverse de celle du syllogisme, qui va du général au particulier. Descartes est en rupture avec la scolastique aristotélicienne ;
- aller du plus simple au plus compliqué : conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés,

- jusqu'à la connaissance des plus composés ;
- vérifier que l'on n'a rien oublié : faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre".

Dans la section qui suit, nous allons vous familiariser avec les étapes nécessaires pour déterminer le modèle mathématique décrivant des phénomènes assez simples. Ici, ces phénomènes relèveront du " mouvement du monde vivant " et seront décrits grâce à la dérivée. Cette modélisation de phénomènes permet de résoudre de nombreux problèmes relevant de différents domaines. Nous aurons à utiliser régulièrement cette méthode dans d'autres situations.

I.1.2 Itinéraire de la modélisation mathématique

Le but de la modélisation est d'obtenir des équations décrivant les phénomènes mis en jeu. Il est essentiel de connaître les hypothèses qui sous-tendent un modèle, leur domaine de validité et le comportement qualitatif que l'on attend des solutions avant d'en chercher une approximation.

De nombreux modèles des sciences de l'ingénieur sont posés sous forme d'une équation différentielle.

Une fois obtenues les équations régissant le modèle se posent un certain nombre de questions d'ordre mathématique : peut-on prouver l'existence et l'unicité de la solution ? si une solution existe, est-elle stable par rapport aux données du problème (conditions limites, condition initiale, termes sources, paramètres phénoménologiques) ? Lorsque la réponse à ces questions est affirmative, on parle de problème bien posé et il est raisonnable d'en envisager une résolution approchée. Une autre question théorique importante est la régularité que l'on peut attendre des solutions du problème.

En effet, une méthode d'approximation peut être adaptée si l'on a affaire à des solutions régulières mais ne pas convenir si des singularités ou des chocs sont présents, ou vice versa.

La mise en œuvre sur ordinateur est la dernière étape, elle aussi incontournable, car on dispose très rarement de solutions analytiques. Le choix de la méthode d'approximation doit s'inspirer de la modélisation physique (quels phénomènes cherche-t-on à représenter ?) et de l'analyse mathématique (quelles sont les propriétés des solutions ?). La qualité d'une méthode d'approximation se juge d'une part en fonction de critères mathématiques (stabilité, estimation d'erreur, ordre de convergence) et d'autre part en fonction de ses performances pratiques, c'est-à-dire de sa capacité à produire une solution pour les besoins de l'ingénieur à des coûts de calculs raisonnables.

I.2 L'utilisation de la dérivée

La dérivée permet d'abord de traiter des phénomènes qui " varient ". Elle mesure, comme nous pouvons l'imaginer, le taux de variation instantané de ces phénomènes ; elle nous indique le sens de leurs variations, etc.

Elle permet aussi de déterminer quand les phénomènes passent par des maximums ou des minimums.

Nous allons donc étudier des phénomènes qui se traitent ou bien par la connaissance de leurs taux de variation (les taux de variation liés) ou bien par les maximums ou les minimums qu'ils atteignent (les problèmes d'optimisation).

Nous allons commencer par définir les outils mathématiques, puis nous verrons comment les utiliser dans le cadre de la " mathématisation de situations concrètes ".

I.3 Les problèmes de taux de variation liés

Les problèmes qui nécessitent cet outil sont des problèmes où la connaissance du Taux de Variation Instantané (dérivée) apporte la solution. La fonction à dériver peut être une fonction régulière $y = f(x)$, elle peut être une fonction implicite, ou elle peut être une fonction telle que sa dérivée peut faire intervenir d'autres variables ou des variables intermédiaires. Ce sont ces deux derniers cas qui relèvent des "taux de variation liés" ou "dérivation composée".

Méthode conseillée

Pour déterminer l'équation décrivant un phénomène basé sur les taux de variation liés, il faut :

1. Déterminer les taux de variation connus et inconnus du problème ;
2. Déterminer l'équation liant la variable dont on recherche le taux de variation avec la variable dont le taux de variation est connu ;
3. Calculer les dérivées à partir de l'équation précédente.

L'équation obtenue est le "modèle mathématique" de la situation proposée dans ce genre de problèmes.

I.3.1 Les problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation sont des problèmes où l'on cherche à savoir à quelles conditions ou à quels moments un phénomène passera par un minimum ou un maximum.

Nous avons vu que quand un phénomène décrit par une fonction $y = f(x)$ passe par un maximum ou un minimum, alors sa dérivée est nulle.

Méthode conseillée

Pour déterminer l'équation décrivant un phénomène basé sur l'optimisation, il faut :

1. Identifier la quantité que l'on cherche à optimiser ;
2. Déterminer la fonction traduisant cette quantité : cette quantité est généralement la variable dépendante et il faut choisir la variable indépendante parmi les variables inconnues ;
3. Dériver cette fonction, identifier les valeurs de la variable indépendante qui annulent cette dérivée et, par le test de la dérivée seconde, identifier la nature des extremums.

L'équation de la fonction, l'équation annulant sa dérivée et l'expression donnant le signe de la dérivée seconde forment le "modèle mathématique" de la situation proposée dans ce genre de problèmes :

$$y = f(x) \quad f'(x) = 0 \quad f''(x)???$$

Exemple I.3.1 *Considérons une compagnie qui produit et vend un certain objet.*

Le coût de production, en dollars, de x objets est $C = 100 + 1,02x$.

Les ventes de x objets rapportent $R = 10x - 0,01x^2$.

Définir les équations permettant de maximiser les bénéfices. La fonction définissant les bénéfices est Bénéfices = Ventes - Coûts. Soit ici :

$$B(x) = 10x - 0,01x^2 - 100 - 1,02x.$$

Soit :

$$B(x) = 8,98x - 0,01x^2 - 100 \quad (\text{I.1})$$

La seconde équation du modèle est celle permettant de déterminer les valeurs annulant la dérivée :

$$B'(x) = 8,98 - 0,02x = 0 \quad (\text{I.2})$$

La solution de cette équation est $x = 449$.

La dérivée seconde est :

$$B''(x) = -0,02 \quad (\text{I.3})$$

La dérivée seconde étant négative, les bénéfices passent par un maximum pour $x = 449$. Les équations (I.1), (I.2) et (I.3) forment le modèle de cette situation.

Remarque I.3.1 On distingue les cas généraux suivants :

- $y = f(x)$ passe par un minimum pour $x = a$ avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$
- $y = f(x)$ passe par un maximum pour $x = a$ avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$

Dans les deux cas, il est très souvent intéressant d'étudier les graphiques.

I.4 La modélisation en écologie

La modélisation mathématique est devenue un outil incontournable de toute étude et recherche dans le domaine de l'écologie. Nous présenterons dans ce cours, les rudiments en matière de modélisation mathématique en ce qui concerne les systèmes dynamiques déterminés, notamment les équations différentielles ordinaires et les modèles en temps discret. Nous présenterons aussi quelques modèles classiques dans le domaine de la dynamique des populations et de l'écologie.

Nous exposerons les techniques d'analyse des modèles mathématiques pour deux grandes familles : les modèles en temps continu et les modèles en temps discrets. Nous présenterons une revue des modèles de croissance d'une population et des modèles d'interaction entre deux populations (proie-prédateur, hôte-parasitoïde, compétition, ...).

Chapitre II

Systèmes dynamiques continue

Objectifs

- ☞ savoir résoudre une équation différentielle ;
- ☞ Maîtriser le calcul de valeurs propres d'une matrices ;
- ☞ Interpréter le portrait de phase à partir des valeurs propres ;
- ☞ Maîtriser la typologie planaire ;
- ☞ Maîtriser la détermination d'une intégrale première ;
- ☞ Savoir bien déterminer les fonctions de Lyapunov et les interpréter ;
- ☞ Maîtriser les calculs en coordonnées polaires ;
- ☞ Reconnaître l'existence d'une bifurcation.

II.1 Étude d'une équation différentielle ordinaire

II.1.1 Définition, existence de solutions

Définition II.1.1 Soient t une variable réelle et $x(t)$ une fonction dérivable de t à valeurs réelles, où t est le temps. Une équation différentielle du premier ordre s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (\text{II.1})$$

Si la fonction f dépend de t , l'équation (II.1) est dite non autonome.

Autrement, on dit que l'équation est autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement de t

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (\text{II.2})$$

Remarque II.1.1 Nous noterons arbitrairement aussi $dx/dt = x'(t)$ la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps t .

Nous nous limiterons aux équations et aux systèmes d'équations du type (II.2). On dira que l'équation (II.2) est linéaire si la fonction f est du premier degré par rapport à x . Sinon, on dit qu'elle est non

linéaire.

Une solution particulière de cette équation dépend de la condition initiale $x_0 = x(t_0)$.

Lorsque la fonction df/dt est continue sur un certain intervalle de $I \subset \mathbb{R}$ de la variable x , il y a existence et unicité de la solution pour toute condition initiale $x_0 \in I$, d'où le théorème.

Théorème II.1.1 *On considère une équation différentielle donnée par l'équation (II.2) où la fonction f est définie sur $I \subset \mathbb{R}$. Si la fonction f est dérivable et de dérivée continue sur I , alors pour tout $x_0 \in I$, il existe T un réel positif et une fonction x définie sur $[-T, T] \times \{x_0\}$ telle que $x(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle pour tout $t \in [-T, T]$. De plus la solution est unique.*

Exercice II.1.1 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = ax. \quad (\text{II.3})$$

Il s'agit d'une équation différentielle à variable séparable, i.e que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{dx}{x} = a dt$$

dans laquelle le premier membre ne fait intervenir que la variable x et le second membre uniquement le temps t . L'intégration membre à membre conduit à la solution :

$$x(t, t_0) = x_0 \exp(a(t - t_0)), \quad (\text{II.4})$$

qui en supposant $x_0 > 0$, selon le signe de a est une fonction croissante du temps pour des valeurs positives de a ou décroissante pour des valeurs négatives de a .

La solution particulière issue d'une condition initiale x_0 est appelée trajectoire et $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse en ce point donné de la trajectoire.

Définition II.1.2 *On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La différentielle de la fonction f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $\frac{df}{dx}(x)$.*

Par exemple, la différentielle de la fonction $f(x) = \exp(ax)$ est

$$df = a \exp(ax) dx.$$

II.1.2 Points d'équilibre, stabilité locale et portrait de phase

En général on ne sait pas résoudre l'équation différentielle (II.2). On fait alors une étude quantitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre de l'équation différentielle. En un point d'équilibre, la vitesse s'annule :

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Les points d'équilibre, que nous noterons x^* vérifient l'équation :

$$f(x^*) = 0.$$

Exercice II.1.2 Rechercher les points d'équilibres de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x).$$

Les équilibres vérifient $\cos(x) = 0$; donc une infinité d'équilibres :

$$x_k^* = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Étude de **stabilité locale** d'un point d'équilibre.

Considérons un point $x(t)$ voisin d'un point d'équilibre x^* . Définissons la nouvelle variable locale, $u(t) = x(t) - x^*$. Dans le voisinage de x^* , la variable $u(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$u'(t) = x'(t) = f(x).$$

La variable $x(t)$ restant dans le voisinage de x^* , on peut développer la fonction $f(x)$ en série de Taylor au premier ordre au voisinage de x^* :

$$u'(t) = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

Or, par définition du point d'équilibre $f(x^*) = 0$, d'où la formule :

$$u'(t) = \lambda^* u + o(u),$$

avec $\lambda^* = \frac{df}{dx}(x^*)$. En négligeant le terme $o(u)$ dans le développement, la solution de l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ est :

$$u(t) = u(0) \exp(\lambda^* t).$$

La stabilité du point fixe est donc donnée par le signe de λ^* .

- ☞ si $\lambda^* < 0$, alors $u(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et par conséquent $x(t)$ tend vers x^* . **On dit que l'équilibre est stable.** Toute solution correspondant à une condition initiale prise dans le voisinage de l'équilibre donne lieu à un retour vers cet équilibre.
- ☞ si $\lambda^* > 0$, $u(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini, et par conséquent $x(t)$ s'éloigne de part et d'autre de x^* . On dit que **l'équilibre est instable**. Toute condition initiale prise dans le voisinage de l'équilibre conduit à une solution qui ne retourne pas à l'équilibre mais qui au contraire s'en éloigne.
- ☞ si $\lambda^* = 0$, il est nécessaire de considérer les termes d'ordre deux dans le développement en série de Taylor de la fonction f au voisinage de x^* .

Remarque II.1.2 Dans le cas $\lambda^* = 0$, le point d'équilibre peut être stable, instable ou conduire à deux nouveaux portraits de phase appelés respectivement **shunt positif (resp. négatif)** si la vitesse est **positive (resp. négative)** de part et d'autre du point d'équilibre. Ces points d'équilibre sont appelés **équilibres semi-stables**.

Exemple II.1.1 ① $dx/dt = x^2$, avec point d'équilibre 0. Ici, $df/dx = 2x$ qui est nulle à l'équilibre. On a donc $\lambda^* = 0$. Cependant quelle que soit la variable x , $dx/dt > 0$, par suite il s'agit d'un shunt positif.

- ② $dx/dt = -x^2$; on est dans le même cas que précédemment sauf qu'ici $dx/dt < 0$, donc il s'agit d'un shunt négatif.
- ③ $dx/dt = x^3$. On a toujours $\lambda^* = 0$, mais le signe de dx/dt s'inverse lorsque l'on traverse le point fixe 0, il s'agit alors d'un point instable.
- ④ $dx/dt = -x^3$. On a encore $\lambda^* = 0$, mais ici, il s'agit d'un point stable

Définition II.1.3 Un équilibre x^* de l'équation différentielle (II.2) est dit **hyperbolique** si $\frac{df}{dx}(x^*)$ est non nul.

Exercice II.1.3 Déterminer les équilibres de l'équation différentielle suivante ainsi que leurs propriétés de stabilité locale :

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - 4x^2 - 11x + 30.$$

Définition II.1.4 Deux équations différentielles sont dites **quantitativement équivalentes** si elles possèdent les mêmes portraits de phase, i.e le même nombre d'équilibres avec les mêmes propriétés de stabilité et se trouvant rangés dans le même ordre.

II.2 Deux équations différentielles ordinaires

La forme générale d'un système de deux équations différentielles ordinaires autonomes est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{II.5}$$

Le système (II.5) définit en fait un vecteur vitesse de manière unique en chaque point du plan. Une conséquence importante est donc que deux trajectoires ne peuvent jamais se couper en un point du plan, sauf en équilibre. Ce résultat est en réalité une conséquence du théorème de Cauchy d'existence et d'unicité des solutions d'un système différentiel autonome pour lequel on fixe les conditions initiales (x_0, y_0) :

Théorème II.2.1 Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel le système différentiel (II.5) est défini et sur lequel les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que le point $(x_0, y_0) \in U$. Il existe un nombre réel T strictement positif tel que le système (II.5) avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ admet une solution unique $(x(t), y(t))$ pour tout t dans $[-T, T]$.

II.2.1 Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre

La démarche est identique à celle d'une équation différentielle.

Un point d'équilibre est défini par les relations :

$$\begin{aligned}f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0\end{aligned}\tag{II.6}$$

Soit $(u(t), v(t))$ les coordonnées locales au voisinage d'un point d'équilibre donné (x^*, y^*) :

$$\begin{aligned}u(t) &= x(t) - x^* \\v(t) &= y(t) - y^*\end{aligned}$$

En considérant le fait que $f(x^*, y^*) = 0$ et $g(x^*, y^*) = 0$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le système linéarisé :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v, \\v &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v\end{aligned}\tag{II.7}$$

qu'il est possible d'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.\tag{II.8}$$

On reconnaît la matrice Jacobienne définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\tag{II.9}$$

Le modèle linéaire (II.7) s'obtient en calculant le jacobien au point d'équilibre du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\tag{II.10}$$

avec la notation $a_{ij}^* = a_{ij}(x^*, y^*)$.

Il faut noter que ce modèle linéaire n'est qu'une approximation du système (II.5) au premier ordre qui n'a de sens que dans un voisinage immédiat d'un point d'équilibre de ce système.

II.2.2 Rappel sur les solutions d'un système linéaire en dimension 2

Soit un système linéaire de deux équations différentielles ordinaire du type :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{II.11}$$

Cherchons la solution de ce système pour une condition initiale :

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Une méthode de résolution de ce système différentiel est :

1. effectuer un changement de base afin de mettre la matrice sous la forme de Jordan ;
2. résoudre le nouveau système dans la nouvelle base ;
3. revenir à la base de départ.

Rappelons les formules qui permettent d'effectuer le changement de la base de départ (x, y) vers la base (u, v) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où P est appelée la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base. La matrice J du nouveau système appelée matrice de Jordan vérifie la relation : $J = P^{-1}AP$ et le nouveau système

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Pour la détermination de la matrice J , trois cas sont possibles :

- ☞ le déterminant de l'équation caractéristique associée à la matrice A est positif : il y a donc existence de deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et la solution du système (II.12) est

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma \exp(\lambda_1 t) \\ v(t) &= \delta \exp(\lambda_2 t), \end{aligned}$$

où γ et δ sont des constantes d'intégration. La solution du système (II.11) dans la base de départ s'obtient par retour dans la base d'origine.

- ☞ le déterminant de l'équation caractéristique associée à la matrice A admet une racine double. Dans la nouvelle base, le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} v(t) &= \delta \exp(\lambda_0 t) \\ u(t) &= (\delta t + \gamma) \exp(\lambda_0 t). \end{aligned}$$

Les constantes δ et γ sont déterminées par les conditions initiales.

- ☞ le déterminant de l'équation caractéristique associée à la matrice A admet deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Dans la nouvelle base, le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

En posant

$$\begin{aligned} r(t) &= \gamma \exp(\alpha(t)) \\ \theta(t) &= \beta t + \gamma \end{aligned}$$

les solutions du système (II.14) sont de la forme

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t) \cos \theta(t) \\v(t) &= r(t) \sin \theta(t).\end{aligned}$$

Les constantes δ et γ sont déterminées par les conditions initiales.

Exercice II.2.1 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

II.2.3 Typologie des systèmes planaires linéaires

Nous allons présenter les différents types de solution du système différentiel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dans le plan de la trace et du déterminant de la matrice $(\text{tr}A, \det A)$ avec $A_{ij} = a_{ij}$. Nous allons distinguer trois cas à partir de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \text{tr}A\lambda + \det A = 0.$$

Si λ_1 et λ_2 sont solutions de cette équation, alors leur somme et produit sont donnés par

$$\begin{aligned}\text{tr}A &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ \det A &= \lambda_1 \lambda_2.\end{aligned}$$

Les trois cas sont déterminés par le signe du discriminant

$$\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A.$$

Remarquons que pour le discriminant nul, ou encore $4\det A = (\text{tr}A)^2$ on a dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$ une parabole passant par l'origine et dont les axes sont orientés vers le haut.

II.2.3.1 Deux valeurs propres réelles distinctes

Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres. On avait dans la nouvelle base les solutions

$$\begin{aligned}u(t) &= \gamma \exp(\lambda_1 t) \\ u(t) &= \delta \exp(\lambda_2 t),\end{aligned}$$

Trois cas sont possibles :

- ☞ $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Il s'agit d'un point instable ou d'une source. Lorsque t tend vers plus l'infini, toutes les deux solutions $u(t)$ et $v(t)$ tendent vers l'infini. Toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre $(0, 0)$ qui est donc instable. Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, les nœuds instables se trouvent au dessous de la parabole dans le demi-plan supérieur $\det A > 0$, et dans la partie $\text{tr}A > 0$ car la somme et le produit est positifs.
- ☞ $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$. Il s'agit d'un point stable ou d'un puit. Lorsque t tend vers plus l'infini, toutes les solutions $u(t)$ et $v(t)$ tendent vers 0. Toutes les trajectoires tendent vers le point d'équilibre $(0, 0)$ qui est donc stable. Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, les nœuds stables se trouvent en dessous de la parabole dans le demi-plan supérieur $\det A > 0$ et dans la partie $\text{tr}A < 0$.
- ☞ λ_1 et λ_2 sont de signes différents, il s'agit d'un point selle ou d'un col. Lorsque t tend vers plus l'infini, une des solutions tend vers plus ou moins l'infini et l'autre tend vers 0. Le point $(0, 0)$ est donc instable. Dans le demi-plan $(\text{tr}A, \det A)$, les points selles se trouvent dans le demi plan inférieur $\det A < 0$.

II.2.3.2 Une valeur propre réelle double

Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, il s'agit de points se trouvant exactement sur la parabole. On distingue deux cas de figures

- ☞ $\lambda > 0$: il s'agit d'un nœud instable dégénéré, $\text{tr}A > 0$;
- ☞ $\lambda < 0$: il s'agit d'un nœud stable dégénéré, $\text{tr}A < 0$.

II.2.3.3 Deux valeurs propres conjuguées

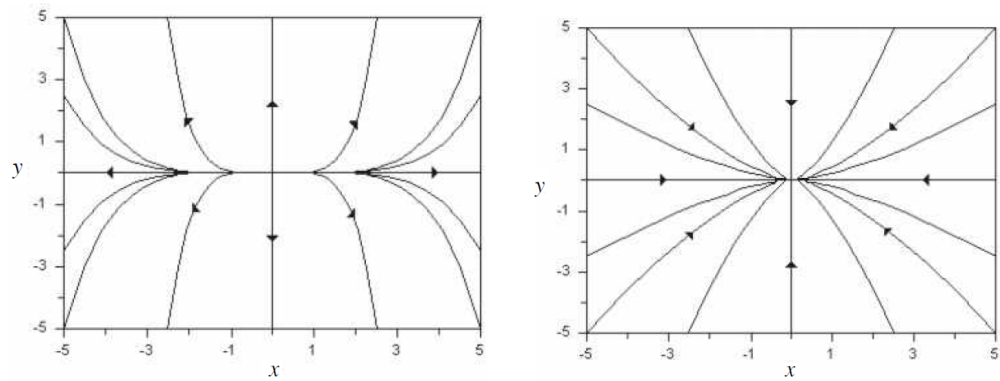
Soient $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ les deux valeurs propres conjuguées. Dans la base de Jordan et dans le système de coordonnées polaires, les solutions sont

$$\begin{aligned}r(t) &= \delta \exp(\alpha t), \\ \theta(t) &= \beta t + \delta.\end{aligned}$$

La trajectoire résulte donc de la combinaison de deux mouvements : un mouvement de rotation autour du point d'équilibre à vitesse angulaire constantes β et un mouvement d'approche ou d'éloignement du point d'équilibre selon une fonction exponentielle du temps avec un facteur α .

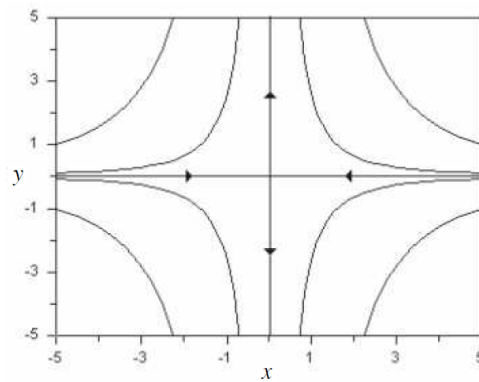
Nous pouvons envisager trois cas de figures :

- ① $\alpha > 0$. Il s'agit d'un foyer instable. Lorsque t tend vers plus l'infini, les solutions $u(t)$ et $v(t)$ spiralent en s'éloignant du point d'équilibre $(0, 0)$ qui est donc instable. Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, les foyers instables se trouvent au dessus de la parabole dans la partie $\text{tr}A = 2\alpha > 0$.



(a) Portrait de phase d'un nœud instable

(b) Portrait de phase d'un nœud instable



(c) Portrait de phase d'un point selle

FIGURE II.1 – Portraits de phase lorsque les valeurs propres sont des réels non nuls

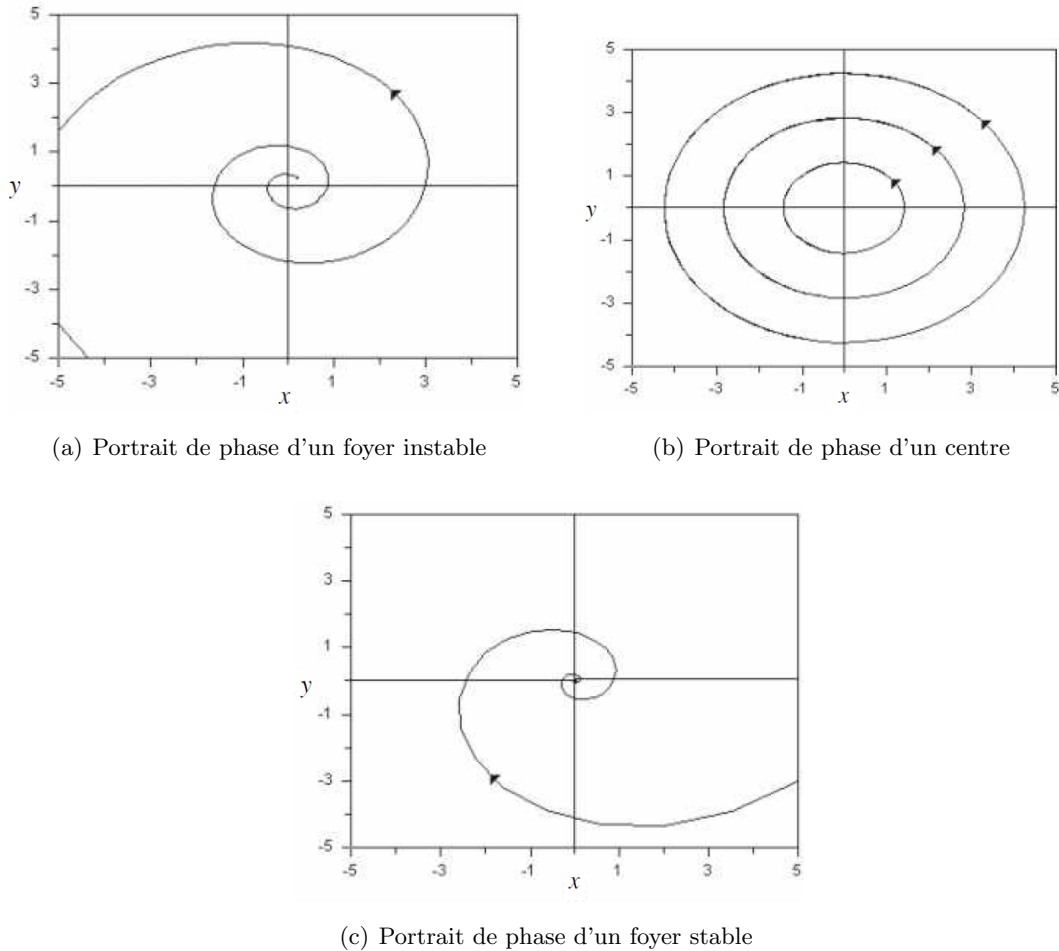


FIGURE II.2 – Portraits de phase lorsque les valeurs propres sont des complexes

- ② $\alpha = 0$. Les deux valeurs sont imaginaires pures, il s'agit d'un centre. Toutes les trajectoires sont des cercles entourant le point d'équilibre $(0, 0)$. Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, les centres se trouvent au dessus de la parabole sur le demi axe positif $\text{tr}A = 0$ avec $\det A > 0$.
- ③ $\alpha < 0$. Il s'agit d'un foyer stable. Les trajectoires spiralent en s'approchant du point d'équilibre $(0, 0)$. Dans le plan $(\text{tr}A, \det A)$, les foyers stables se trouvent au dessus de la parabole dans la partie $\text{tr}A = 2\alpha < 0$.

Exercice II.2.2 Déterminer pour chacun des systèmes suivants si l'origine, unique point d'équilibre, est un nœud stable ou instable, un foyer stable ou instable, un point selle ou un centre :

1.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

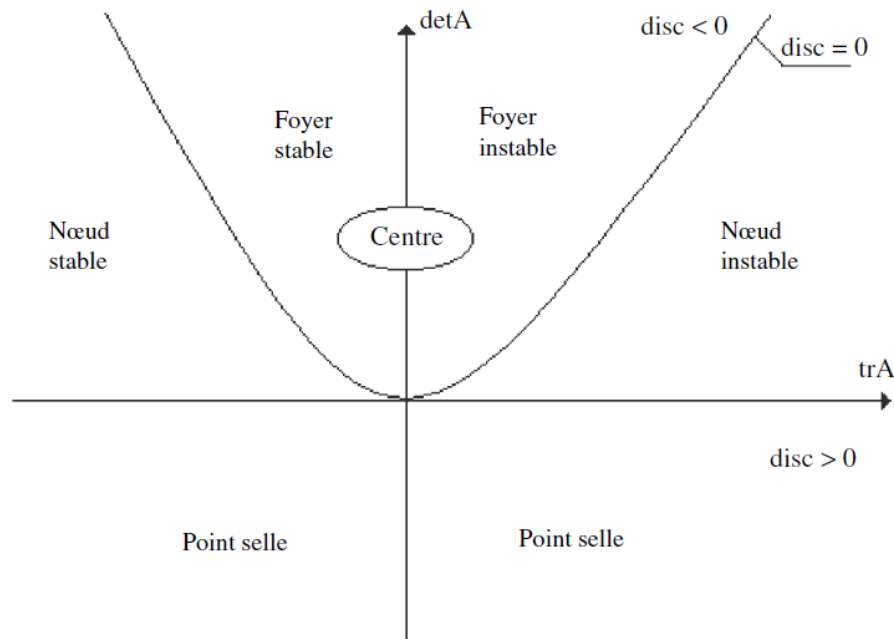


FIGURE II.3 – Typologie des systèmes planaires en dimension 2 en fonction de la trace et du déterminant de la matrice A dans le cas $\det A \neq 0$.

3.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

II.2.4 Stabilité asymptotique, stabilité neutre, stabilité structurelle

Soit le système de deux équations différentielles ordinaires couplées suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{II.15}$$

Nous pouvons définir la stabilité d'un point d'équilibre comme suit :

Définition II.2.1 Un point d'équilibre (x^*, y^*) d'un système du type (II.15) est dit stable si pour tout voisinage V de (x^*, y^*) , il existe $U \subseteq V$ tel que toute trajectoire pénétrant dans U reste dans V pour tout t suivant.

Dans le cas où l'équilibre est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable. Pour distinguer entre les différents types de stabilité, on définit la **stabilité asymptotique** lorsque la limite de la trajectoire est le point d'équilibre lorsque t tend vers plus l'infini. Lorsqu'un équilibre est stable mais pas asymptotiquement stable, on parle de **stabilité neutre**. Un point est dit **instable** lorsqu'il n'est pas stable. Par conséquent, les foyers et les nœuds instables ou encore les points selles sont instables.

Définition II.2.2 On dit qu'un équilibre est hyperbolique si la matrice jacobienne à cet équilibre possède des valeurs propres de partie réelle non nulle.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème II.2.2 *Soit un système différentiel défini sur un ouvert U par le système (II.15) avec f et g différentiables et de dérivées partielles continues sur U . On suppose que ce système n'admet qu'un équilibre dans U et que cet équilibre est hyperbolique. Alors le système est dit structurellement stable.*

II.2.5 Étude des portraits de phase planaires

Soit un système de deux équations différentielles ordinaires du type (II.15) admettant des points d'équilibre (x_i^*, y_i^*) avec $i \in [1, N]$ où N est le nombre d'équilibres. Nous avons vu précédemment la détermination de la stabilité locale de chaque équilibre. Afin de déterminer l'allure des trajectoires dans le plan (x, y) , le portrait de phase, il est utile de rechercher les isoclines zéros.

Les isoclines zéros sont les lieux des points du plan (x, y) où l'une des composantes du vecteur vitesse est nulle. Par conséquent, en dimension deux, il existe deux types d'isoclines zéro.

- les isoclines vérifiant $\dot{x} = f(x, y) = 0$, qui sont appelés **isoclines verticales**. La composante **horizontale** de la vitesse x est nulle. Lorsqu'une trajectoire coupe une isocline $\dot{x} = 0$, la direction du vecteur vitesse, qui est tangente à la trajectoire, est verticale.
- Les isoclines vérifiant $\dot{y} = g(x, y) = 0$, qui sont appelées les **isoclines horizontales**. La composante **verticale** de la vitesse y est nulle. Lorsqu'une trajectoire coupe une isocline $\dot{y} = 0$, la trajectoire du vecteur vitesse est horizontale.

Exemple II.2.1 : *Analyse d'un système dynamique planaire.*

Soit le système différentiel ordinaire non linéaire couplé :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = x - xy^2 \\ \dot{y} &= g(x, y) = y - yx^2.\end{aligned}\tag{II.16}$$

Les points d'équilibre de ce système vérifient le système

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x - xy^2 = 0 \\ g(x, y) &= y - yx^2 = 0.\end{aligned}$$

Il est évident que ce système admet cinq points d'équilibre, l'origine $(0, 0)$, et les points $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ et $(1, 1)$.

Les isoclines $\dot{x} = 0$ vérifient l'équation $x(1 - y^2) = 0$ et définissent donc trois droites : $x = 0$ et $y = \pm 1$.

Les isoclines $\dot{y} = 0$ vérifient l'équation $y(1 - x^2) = 0$ et définissent donc trois droites : $y = 0$ et $x = \pm 1$.

Il faut à présent linéariser le système au voisinage de chaque point d'équilibre en calculant la matrice jacobienne

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 & -2xy \\ -2xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Pour l'origine, nous avons

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne est diagonale et admet une valeur propre double $\lambda_0 = 1$. Il s'agit d'un nœud dégénéré instable appelé étoile.

Pour les points d'équilibre $(-1, -1)$ et $(1, 1)$, on a :

$$A(-1, -1) = A(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, nous avons $\text{tr}A = 0$ et $\det A = -4$, ce qui implique des points selle.

Pour les deux derniers points d'équilibre, nous avons aussi

$$A(-1, 1) = A(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\text{tr}A = 0$ et $\det A = -4$, ce qui implique des points selle aussi. La linéarisation a permis de montrer que l'origine est un nœud instable entouré de quatre points selle.

Afin de tracer l'allure des trajectoires, il est nécessaire de rechercher le sens du vecteur vitesse le long d'une isocline. Par exemple, la droite $x = 0$ est isocline $\dot{x} = 0$ et le vecteur vitesse est donc de direction verticale le long de cette droite. Pour connaître son sens, il suffit de remplacer x par 0 dans l'équation de la composante verticale du vecteur vitesse. Il vient que :

$$\dot{y} = y.$$

$\dot{y}$ et y sont donc de même signe. Par conséquent, sur l'axe $x = 0$ le vecteur vitesse est vertical dirigé vers les y positifs pour $y > 0$ et dirigé vers les négatifs pour $y < 0$.

De la même façon, on détermine le sens du vecteur vitesse sur la droite $y = 0$ qui est isocline horizontale.

Connaissant le sens du vecteur vitesse sur une isocline, deux règles permettent de déduire son sens sur n'importe quelle autre isocline de même nature :

- Lorsque deux isoclines de même nature se coupent en un point, le vecteur vitesse est commun au point d'intersection, et par continuité, le vecteur vitesse possède le même sens sur les deux isoclines.
- Le sens du vecteur vitesse s'inverse à la traversée d'un point d'équilibre.

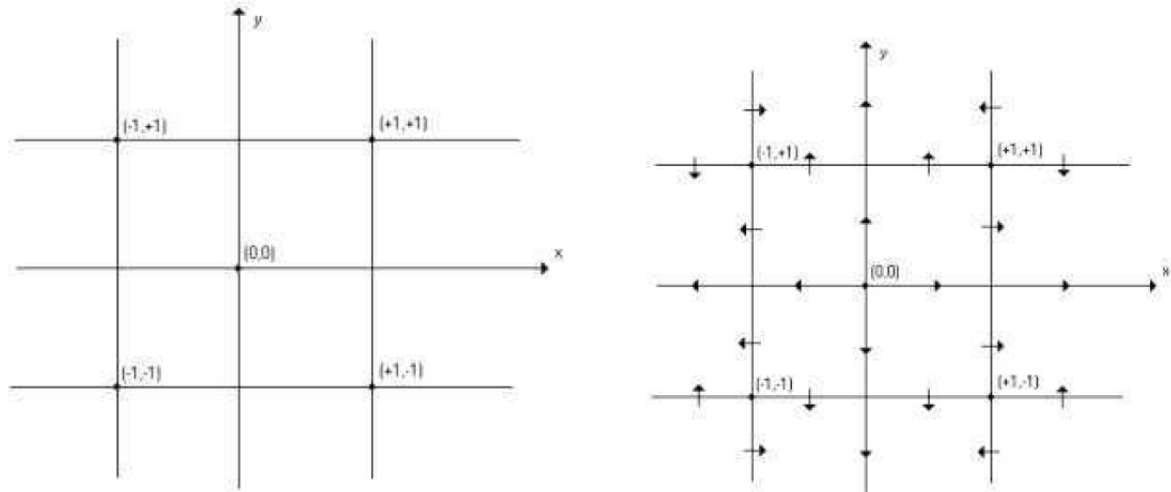
Ce dernier résultat n'est valable que dans le cas où $\det A \neq 0$. Si $\det A = 0$, il faut faire une étude approfondie. La figure suivante montre le portrait de phase pour notre système dynamique étudié.

Il est possible de tracer l'allure des trajectoires dans le plan (x, y) en respectant les directions et sens du vecteur vitesse sur les isoclines et dans chaque compartiment en tenant compte de la nature des points d'équilibre.

On constate sur la figure de portrait que lorsque l'on s'approche d'un point d'équilibre, le portrait de phase local correspond à celui prévu par la linéarisation, c-à-d un nœud instable pour l'origine et un point selle pour les quatre autres équilibres.

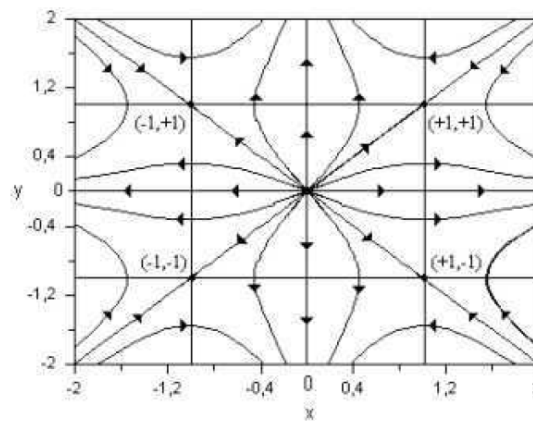
Définition II.2.3 On considère une solution $x(t)$ du système (II.15) telle que $x(t)$ tend vers un équilibre x_1^* quand $t \rightarrow -\infty$ et $x(t)$ tend vers x_2^* quand $t \rightarrow +\infty$. La trajectoire associée à $x(t)$ est appelée trajectoire **hétérocline**.

Définition II.2.4 Si $x_1^* = x_2^*$ dans la définition précédente, on dit que la trajectoire est **homocline**.



(a) Isocline zéros du système

(b) Isocline zéros avec la direction et le sens du vecteur vitesse



(c) Portrait de phase du système

FIGURE II.4 – Portrait de phase d'un

Exercice II.2.3 Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Rechercher les équilibres de ce système et déterminer leurs propriétés de stabilité locale en linéarisant au voisinage des équilibres. Tracer les isoclines zéros et le portrait de phase.

II.3 Étude des systèmes dynamiques en temps continu

La dynamique d'un système et la dynamique du même système linéarisé ne correspondent pas dans certains cas. Tel est le cas du système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}\tag{II.17}$$

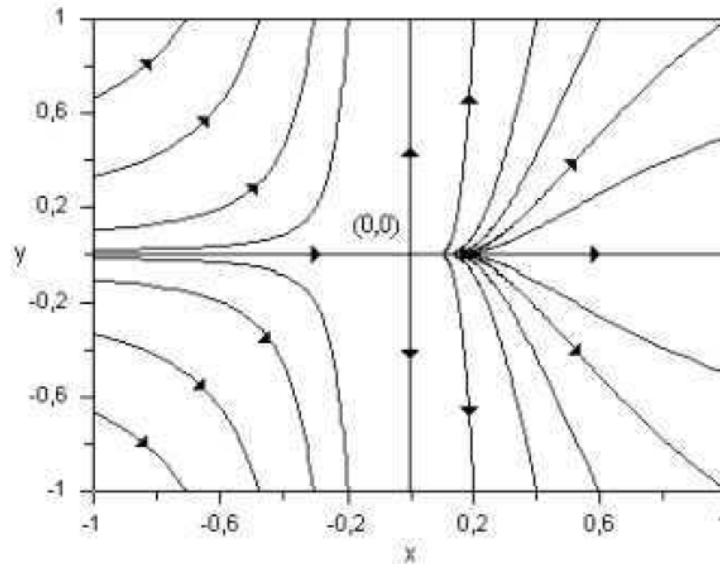


FIGURE II.5 – Portrait du système dynamique

Ce système admet un seul équilibre qui est l'origine. Le système est composé de deux équations découplées, un shunt positif sur l'axe des x et un point instable sur l'axe des y , d'où le portrait de phase.

La linéarisation au voisinage de l'origine conduit à

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

. Il s'agit d'un cas où la matrice de la partie linéarisée possède une seule valeur propre qui est zéro, $\det A = 0$. La solution du système est donc :

$$\begin{aligned}u(t) &= \gamma \\ v(t) &= \delta \exp(t).\end{aligned}$$

La représentation est bien différente du portrait de phase précédent.

Dans ce cas, la linéarisation a échoué. Il est donc important de savoir dans quelles conditions la linéarisation est valable.

Définition II.3.1 Soient deux systèmes différentiels Σ_1 et Σ_2 définis sur les ouverts $U \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathbb{R}^2$ respectivement. On dit que ces deux systèmes ou leurs portraits de phase sont **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme H de U sur V tel que l'image du portrait de phase de Σ_1 par H soit le portrait de phase de Σ_2 .

On a le théorème de linéarisation suivant :

Théorème II.3.1 *Soit un système dynamique non linéaire défini sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ et admettant un unique équilibre en $0 \in U$. Les portraits de phase du système non linéaire et de son système linéarisé au voisinage de l'équilibre sont topologiquement équivalents si l'équilibre est hyperbolique.*

la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre est donc valable lorsque la linéarisation prévoit un foyer, un nœud ou encore un point selle mais elle est insuffisante pour connaître la dynamique d'un système non linéaire lorsque le système linéaire admet une valeur propre de partie réelle nulle. Dans ce cas, la linéarisation ne permet pas de conclure et il faut avoir recours à d'autres méthodes.

De plus, la connaissance de la nature des points fixes obtenus par linéarisation même si elle marche, ne donne de renseignements que sur la dynamique locale, c-à-d dans un voisinage immédiat de chaque équilibre. Pour connaître le portrait de phase global, il faut utiliser d'autres méthodes, plus globales, tenant compte des termes non linéaires dans les équations.

II.3.1 Fonctions de Liapunov

Définition II.3.2 *On appelle fonction définie positive (resp. négative) une fonction $V(x, y)$ définie, différentiable et de différentielle continue sur un ouvert $\mathcal{D}$ contenant l'origine et vérifiant les propriétés suivantes :*

- $V(0, 0) = 0$;
- $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, V(x, y) > 0$ (resp. $V(x, y) < 0$).

Exemple de la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$. La dérivée de la fonction $V(x, y)$ par rapport au temps est :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y).$$

Théorème II.3.2 Stabilisation de Liapunov

Soit le système dynamique $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ admettant l'origine comme point fixe. S'il existe une fonction réelle $V(x, y)$ définie dans un voisinage de l'origine telle que :

- les dérivées partielles $\partial V / \partial x$ et $\partial V / \partial y$ existent et sont continues ;
- $V(x, y)$ est définie positive ;
- $\dot{V}$ est définie négative

alors l'équilibre est un équilibre asymptotiquement stable.

On dit que la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Liapunov forte. Si $\dot{V}$ est définie positive, alors l'origine est un équilibre instable.

Exercice II.3.1 1. Soit le système dynamique suivant $\dot{x} = -x^3$, $\dot{y} = -y^3$. Déterminer la stabilité de l'équilibre.

2. Étudier le système suivant $\dot{x} = x - 3$, $\dot{y} = 2y^3$.

3. Soit le système dynamique $\dot{x} = -y + \alpha x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x + \alpha y(x^2 + y^2)$. Étudier la stabilité du point d'équilibre en fonction du signe du paramètre réel α .

II.3.2 Systèmes conservatifs, intégrale première

Définition II.3.3 Intégrale première

Une fonction $H(x, y)$ est dite *intégrale première* d'un système dynamique du type $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ sur un domaine $\mathcal{D}$ du plan si $H(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $(x(t), y(t))$ du système dynamique.

Lorsqu'une intégrale première existe, elle n'est pas unique. Si $H(x(t), y(t))$ est intégrale première, alors $H(x(t), y(t)) + \gamma$ ou bien $\gamma H(x(t), y(t))$ sont des solutions, avec γ réels. Le fait que $H(x(t), y(t))$ soit intégrale première implique qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y} g(x, y) = 0.$$

Définition II.3.4 Système conservatif

Un système dynamique qui admet une intégrale première est dit *conservatif*.

Les système **Hamiltoniens** sont conservatifs. Ils sont définis par les équations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x},\end{aligned}$$

où x est la position d'une particule ponctuelle, p sa quantité de mouvement et $H(x, p)$ son énergie totale. dans ce cas, le calcul précédent qui assure la constance de la fonction H le long des trajectoires est toujours vérifié. On a en effet :

$$\frac{dH(x(t), p(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

L'existence d'une intégrale première est très utile car elle permet de trouver les trajectoires qui sont les courbes de niveaux de la fonction H . En effet, afin d'obtenir les trajectoires d'équilibre, il faut éliminer le temps entre les deux équations du système dynamique, ce qui conduit à l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Si la solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$H(x, y) = \gamma,$$

où γ est une constante, alors $H(x, y)$ est intégrale première du système dynamique. La constante γ est déterminée par une condition initiale $H(x_0, y_0)$. La trajectoire de cette condition initiale s'effectue à H constante.

Exemple II.3.1 Recherchons si le système dynamique suivant admet une intégrale première :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x},$$

avec solutions

$$x^2 + y^2 = \gamma.$$

Par conséquent, on peut prendre

$$H(x, y) = x^2 + y^2$$

qui est intégrale première sur tout le plan. Le système est conservatif et les trajectoires sont des cercles centrés sur l'origine.

Les intégrales premières jouent des rôles très importants en particulier pour démontrer l'existence des centres. En effet, nous avons vu que les centres ne sont pas structurellement stables. En conséquence, lorsque la linéarisation prévoit un centre, il n'est en général pas du tout certain que des trajectoires centrales sont bien conservées. Pour démontrer l'existence de trajectoires fermées autour de l'équilibre, on peut essayer de montrer que le système dynamique est conservatif et que son intégrale première possède un minimum local au point d'équilibre. dans ce cas, les trajectoires du système dynamique qui sont les courbes de niveau de l'intégrale première, s'obtiennent en fixant la valeur de l'intégrale première. Si l'on représente le graphe de la fonction $H(x, y)$, les trajectoires sont obtenues en considérant les points se trouvant à une altitude donnée. Au voisinage d'un extremum, les courbes de niveau se referment dans le voisinage du point d'équilibre. Cela démontre l'existence de trajectoires centrales autour de l'équilibre.

Exercice II.3.2 Rechercher l'intégrale première du système dynamique

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = -y + xy.$$

$$H(x, y) = x + y - \ln(x) - \ln(y).$$

II.4 Introduction à la bifurcation en dimension 2

Définition II.4.1 Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée, au moins d'un côté.

Un cycle limite est donc différent des trajectoires fermées dans un cercle pour lequel il y a une infinité de trajectoires fermées. dans le cas d'un centre, il est impossible d'isoler une trajectoire fermée.

Exemple II.4.1 Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = y + x(1 - (x^2 + y^2))$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - (x^2 + y^2))$$

L'origine est le seul centre et les valeurs propres définies par la partie linéaire au voisinage de l'origine sont

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Par conséquent, l'origine est un foyer instable et pour connaître la dynamique globale, nous devons effectuer un changement de variables en écrivant le système en coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2}. \end{aligned}$$

Par simplification, on obtient le système

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned}$$

La solution de la seconde équation est

$$\theta(t) = -t + \theta_0$$

où θ_0 est la constante d'intégration correspondant à $\theta(0)$. L'angle varie donc à vitesse angulaire constante. Pour la première équation, puisque $r > 0$, $\dot{r}$ a le signe de $1 - r^2$.

Par conséquent, il est clair que le cercle unité est une trajectoire fermée. De plus on voit que pour $r < 1$, la trajectoire spirale en s'éloignant de l'origine alors que pour $r > 1$, la trajectoire spirale mais avec un rayon vecteur qui diminue avec le temps t . En prenant donc une condition initiale à l'intérieure ou à l'extérieure du cercle unité, la trajectoire va s'approcher progressivement de ce cercle qui constitue une trajectoire isolée fermée appelée **cycle limite**. De plus quelle que soit la condition initiale (θ_0, r_0) , toute trajectoire tend vers le cercle limite pour tout t tendant vers l'infini. On dit que le cycle limite est stable, dans ce cas il est même globalement stable.

Remarque II.4.1 Un cycle limite n'est pas toujours stable.

Soit un système de deux équations différentielles du premier ordre autonomes couplées, dépendant d'un paramètre γ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \gamma) \\ \dot{y} &= g(x, y, \gamma). \end{aligned} \tag{II.18}$$

Les points d'équilibres sont solutions du système de deux équations

$$\begin{aligned} f(x, y, \gamma) &= 0 \\ g(x, y, \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, s'il existe des équilibres, ils dépendent en général de la valeur de γ , et nous les noterons $(x^*(\gamma), y^*(\gamma))$. Le nombre de solutions peut changer lorsque γ traverse certaines valeurs critiques γ_c . Des solutions périodiques de type cycle limite stable ou instable peuvent exister pour certaines valeurs de γ . Une étude de bifurcation consiste donc rechercher comment le portrait de phase de ce système se modifie lorsque l'on fait varier le paramètre γ .

II.4.1 Bifurcation selle-nœud

Soit le système dynamique suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \gamma + x^2 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Il y a trois cas à distinguer :

1. $\gamma < 0$. Il y a existence de deux points d'équilibres : $(-\sqrt{-\gamma}, 0)$ et $(\sqrt{-\gamma}, 0)$. Le premier point est un équilibre stable alors que le second est un point selle.
2. $\gamma = 0$. L'unique point d'équilibre est l'origine et la matrice jacobienne calculée à l'origine liée à la linéarisation admet une valeur propre nulle. Si nous reprenons le système linéaire pour $\gamma = 0$, nous obtenons deux équations découplées. La première admet $x^* = 0$ comme équilibre qui est un shunt positif. La seconde admet $y^* = 0$ pour équilibre qui est stable. On voit que l'origine est donc un équilibre non hyperbolique, i.e $\det A = 0$. D'où le portrait de phase est la combinaison des deux trajectoires.
3. $\gamma > 0$. La première équation n'admet de zéros, par conséquent le système n'admet aucun point d'équilibre.

Au voisinage de $\gamma_c = 0$, le nombre d'équilibre passe de deux à zéros. C'est de là que vient l'appellation bifurcation selle nœud.

D'une manière générale, une bifurcation selle-nœud se produit lorsque deux isoclines zéros, ne se coupant pas pour certaines valeurs du paramètre, vont devenir tangentes pour une valeur particulière de celui-ci. En continuant à faire varier les valeurs du paramètre, elles vont en général, se couper en deux nouveaux points d'équilibre, l'un stable et l'autre instable.

Plus généralement, considérons le système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Un vecteur orthogonal à la première isocline définie par $f(x, y) = 0$ est proportionnel au vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. de même, un vecteur tangent à la seconde isocline est proportionnel au vecteur de composantes $\left(-\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}\right)$. La condition mathématique pour qu'il y ait tangence des deux isoclines est que le produit scalaire soit nul ou encore le déterminant formé par ces deux vecteurs soient nul :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

i.e. que les deux vecteurs ont des directions parallèles. Cette condition doit être vérifiée au point d'équilibre. Une bifurcation selle-nœud est caractérisée par le déterminant de la matrice jacobienne nulle à la bifurcation.

II.4.2 Bifurcation fourche

Soit le système dynamique

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\gamma x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Il y a encore trois cas possible de γ .

1. $\gamma < 0$. L'origine est un point selle entouré de deux autres nœuds stables.
2. Pour $\gamma = 0$ et $\gamma > 0$, l'origine est un point d'équilibre stable.

II.4.3 Bifurcation Verticale

Considérons à présent le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \gamma x + y \\ \dot{y} &= -x + \gamma y.\end{aligned}$$

L'origine est le seul point d'équilibre. Mais ici, nous devons réécrire le système en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \gamma r \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}$$

Nous retrouvons encore trois cas selon les valeurs de γ .

1. $\gamma < 0$. Dans ce cas, $\dot{r} < 0$ et par conséquent les trajectoires spiralent vers l'origine qui est un foyer stable.
2. $\gamma = 0$. Le rayon reste constant égal au rayon initial. Les trajectoires sont des cercles centrés sur l'origine. L'origine est donc un centre.
3. $\gamma > 0$. $\dot{r} > 0$, donc les trajectoires spiralent en s'éloignant de l'origine qui est donc instable.

Ici, il y a un seul point d'équilibre pour toute valeur de γ mais la nature du point d'équilibre change.

II.4.4 Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf

Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(\gamma - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(\gamma - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

L'origine est ici aussi le seul point d'équilibre pour toutes valeurs de γ . Si nous réécrivons ces équations différentielles en coordonnées polaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\gamma - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}$$

Suivant les valeurs de γ , trois cas sont possibles :

1. $\gamma < 0$. Dans ce cas, $\dot{r} < 0$ et par conséquent les trajectoires spiralent vers l'origine qui est un foyer stable.
2. $\gamma = 0$. $\dot{r} < 0$, donc les trajectoires spiralent vers l'origine qui est donc globalement asymptotiquement stable.
3. $\gamma > 0$. La première équation admet deux équilibre 0 et $\sqrt{\gamma}$. Le premier est instable et le second stable. Ce dernier correspond à une trajectoire fermée qui est un cycle limite stable.

Lorsque le paramètre γ change de signe, il apparaît un cycle limite stable qui est un cercle centré sur l'origine et dont l'amplitude augmente en $\sqrt{\gamma}$.

II.4.5 Théorème de bifurcation de Hopf

Définition II.4.2 *Domaine attractant du plan* On appelle domaine attractant une région D du plan bornée et compacte telle que toute trajectoire partant du bord ∂D de D entre dans l'intérieur de D .

Exemple II.4.2 *Considérons le système dynamique*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}$$

L'origine est le seul point d'équilibre et c'est un centre. Soit $D = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ le domaine défini par le disque de rayon 1. Il s'agit d'un domaine borné et compact qui est positivement invariant car toute trajectoire prise dans D reste dans D , y compris pour une condition initiale prise sur la frontière du domaine, soit le sur le cercle unité qui est une trajectoire.

☞ Bifurcation de Hopf supercritique :

Soit le système d'équations différentielles sous la forme générale :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \gamma) \\ \dot{y} &= g(x, y, \gamma)\end{aligned}$$

où γ est un paramètre réel. Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système pour toute valeur du paramètre γ . Soit la partie linéaire du système correspondant à la matrice Jacobienne $A(0, 0)$ calculée à l'origine :

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)}.$$

D'une manière générale, on a une bifurcation de Hopf lorsque le déterminant de la partie linéaire est positif et que la trace peut changer de signe en faisant varier le paramètre γ . Soient $\lambda_1(\gamma)$ et $\lambda_2(\gamma)$ les deux valeurs propres de cette Jacobienne :

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\gamma) \pm i\beta(\gamma).$$

Le théorème de Hopf est le suivant :

Théorème II.4.1 *On utilise les notations précédentes. Supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :*

1. la partie réelle des valeurs propres s'annule, pour une valeur critique γ_c du paramètre, soit $\alpha(\gamma_c) = 0$;
2. pour $\gamma = \gamma_c$, la partie imaginaire des valeurs propres est différente de zéro, i.e. $\beta(\gamma_c) \neq 0$. Cela revient à dire que les valeurs propres sont imaginaires pures.
3. Supposons de plus que $\frac{d\alpha}{d\gamma}(\gamma_c) > 0$.

Alors on peut conclure que :

- ① $\gamma = \gamma_c$ est une valeur de bifurcation du système.
- ② il existe $\gamma_1 < \gamma_c$ tel que pour tout $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_c]$ l'origine est un foyer stable.
- ③ pour tout voisinage U de l'origine, il existe $\gamma_2 > \gamma_c$ tel que pour tout $\gamma \in [\gamma_c, \gamma_2[$ l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable contenu dans U , dont l'amplitude augmente et est de l'ordre de $\sqrt{\gamma - \gamma_c}$.

Le théorème informe sur l'existence d'un cycle limite stable dans un certain voisinage de $\gamma > \gamma_c$, jusqu'à une certaine valeur γ_2 , qui n'est pas connue. Le cycle peut exister pour toute valeur de $\gamma > \gamma_c$, ou bien peut disparaître au-delà d'une valeur γ_2 .

Ce n'est pas toujours le cas et le théorème suivant complète le précédent dans le cas où la dérivée de la partie réelle est négative.

Théorème II.4.2 Si l'on remplace dans le théorème de bifurcation de Hopf la troisième hypothèse par la condition :

Supposons de plus que $\frac{d\alpha}{d\gamma}(\gamma_c) < 0$.

Alors les conclusions deviennent :

- ① $\gamma = \gamma_c$ est une valeur de bifurcation du système.
- ② il existe $\gamma_2 > \gamma_c$ tel que pour tout $\gamma \in [\gamma_c, \gamma_2[$ l'origine est un foyer stable.
- ③ pour tout voisinage U de l'origine, il existe $\gamma_1 < \gamma_c$ tel que pour tout $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_c]$ l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable contenu dans U , dont l'amplitude augmente et est de l'ordre de $\sqrt{\gamma_c - \gamma}$.

Exemple II.4.3 Considérons le système dynamique

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(-\gamma - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(-\gamma - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

L'origine est l'unique point d'équilibre et la matrice Jacobienne de la partie linéaire à l'origine est

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i$.

Nous avons $\det A(0,0) = \gamma^2 + 1$ et $\text{tr } A(0,0) = -2\gamma$. Nous avons donc une bifurcation de Hopf avec $\gamma_c = 0$. La dérivée de la partie réelle est $\frac{d\alpha}{d\gamma}(\gamma_c) = -1 < 0$. Il vient donc que pour les valeurs négatives de γ , l'origine est un foyer instable, et que pour les valeurs positives il s'agit d'un foyer stable.

En coordonnées polaires, nous avons le système :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(-\gamma - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\gamma < 0$, le foyer instable est entouré d'un cycle limite stable qui est le cercle de rayon $\sqrt{-\gamma}$. Pour $\gamma = 0$, le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}$$

ce qui montre que l'origine est stable. Enfin pour $\gamma > 0$, l'origine est un foyer stable (partie réelle négative).

Le cycle limite qui apparaît peut être instable et dans ce cas, la bifurcation est dite souscritique.

☞ bifurcation souscritique

Chapitre III

Applications en dynamique des Populations

Objectifs

- ☞ Maîtriser les modèles de croissance ;
- ☞ Maîtriser d'une population exploitée ;
- ☞ Maîtriser la de deux population en interaction ;
- ☞ Savoir utiliser les critères de Routh-Hurwitz
- ☞ Maîtriser la dynamique de plusieurs populations en interaction ;

III.1 Modèle de dynamique d'une seule population

III.1.1 Modèle de croissance linéaire

Nous allons étudier la dynamique d'une seule population où la variable d'état est l'effectif $x(t)$ à un instant t . Considérons la forme générale de la loi de croissance de la population

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Soit par exemple n le taux de natalité par unité de temps et par individu. Soit m le taux de mortalité. Nous supposons ces deux taux constants, ce qui conduit au modèle linéaire

$$\frac{dx}{dt} = nx - mx = rx, \tag{III.1}$$

où $r = n - m$ est le taux de croissance de la population.

La solution de ce problème est

$$x(t) = x_0 \exp(rt).$$

Nous pouvons constater que le signe de r déterminera l'évolution de cette population.

III.1.2 Modèle de croissance logistique

Une hypothèse éaliste consiste à supposer que le taux de natalité n'est pas constant mais diminue avec l'effectif. Dans le cas le plus simple, on choisit pour le taux de natalité une fonction linéaire décroissante :

$$n(x) = \alpha - \beta x,$$

où α et β sont des constantes positives.

On suppose aussi que le taux de mortalité va, au contraire du taux de natalité, augmenter avec l'effectif.

On peut prendre la fonction :

$$m(x) = \gamma + \delta x,$$

où γ et δ sont des constantes positives.

Leur substitution dans l'équation (III.1) conduit à l'équation de croissance :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) = f(x),$$

où $r = \alpha - \gamma$ qui est le taux de croissance intrinsèque de la population. Supposons dans la suite $r > 0$. K s'appelle la capacité limite du milieu et est égal à :

$$K = \frac{\alpha - \gamma}{\beta + \delta}.$$

Puisque r est positif, alors K est aussi positif.

Cette équation appelée **l'équation logistique** admet deux points d'équilibres : l'origine et K . Calculons la dérivée de f afin d'étudier la stabilité des équilibres.

La valeur de la dérivée $f'(x) = r - 2rx/K$ est r à l'origine et $-r$ en K . Par conséquent, l'origine est instable et K est un équilibre stable. Pour toute condition initiale positive, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = K.$$

III.1.3 L'équation de Grompertz

L'équation de croissance de Grompertz s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \left(\frac{K}{x} \right) = f(x),$$

où r et K sont des constantes strictement positives.

Cette équation possède aussi l'origine et K pour points d'équilibres. ici, la dérivée de la fonction f vaut :

$$f'(x) = r \left(\ln \left(\frac{K}{x} \right) - 1 \right).$$

Elle vaut r en K , ce qui montre que K est stable. La dérivée n'étant pas définie à l'origine, il est donc utile d'étudier la fonction $f(x)$. La fonction f est strictement positive pour $0 < x < K$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+ . En conséquence, la population est strictement croissante pour toute valeur positive inférieure à K . La vitesse de croissance devient infinie à l'origine. L'origine est donc instable car toute condition initiale proche de l'origine et positive donne lieu à une augmentation de l'effectif et

donc à une solution qui s'éloigne de 0. L'équation de Gompertz possède un comportement dynamique qualitativement équivalent à celui de l'équation logistique.

.....

Il est important de rechercher la valeur de x pour laquelle la croissance de la population est maximale. Ce point correspond à la valeur de la variable pour laquelle la solution $x(t)$ présente un point d'inflexion et se calcule en recherchant le maximum de $f(x)$ puisque $f(x) = dx/dt$ est aussi égale à la vitesse de croissance de la population, soit lorsqu'on aura :

$$f'(x) = 0.$$

Dans le cas de l'équation logistique, le point d'inflexion se trouve en $x_i = K/2$, alors que dans le cas de l'équation de Gompertz, il se trouve en $x_i = K/e$. Le choix d'une fonction de croissance logistique ou de Gompertz impose une croissance maximale pour des valeurs précises de l'effectif.

Afin d'obtenir une loi de croissance avec un point d'inflexion à une position quelconque, on définit l'équation logistique généralisée :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \left(\frac{x}{K} \right)^q \right), \quad (\text{III.2})$$

où q est un réel strictement positif.

Exercice III.1.1 Déterminer le point d'inflexion dans le cas de l'équation logistique généralisée. Pour quelle valeur de q retrouve-t-on la formule de la logistique $x_i = K/2$?

III.1.4 Modèle de croissance avec effet "Allee"

Soit l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx(x - M)(K - x) = f(x), \quad (\text{III.3})$$

avec $0 < M < K$.

Les points d'équilibre sont l'origine, M et K et on a aussi $f'(x) = r(-3x^2 + 2(M + K)x - MK)$.

On a $f'(0) = -rMK < 0$. La dérivée prend aussi les valeurs $rM(K - M) > 0$ en M et $rK(M - K) < 0$ en K . En conséquence, l'origine et K sont stables à l'instar de M qui est instable.

On remarquera que pour une condition initiale $0 < x_0 < M$ la population décroît et va à l'extinction, alors que pour une condition initiale au dessus de ce seuil, la population tend vers la capacité limite K . Cet effet est connu en dynamique de population sous le nom d'effet "Allée". Il correspond à des populations qui ne sont viables qu'à partir d'un certain seuil limite en effectif.

Exercice III.1.2 Étudier la loi de croissance d'une population dont le taux de croissance est supposé être proportionnel à la densité de la population :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2.$$

Dans ce cas, on fait l'hypothèse que la loi de croissance est proportionnelle au taux de rencontre entre les individus, ce qui correspond par exemple à une reproduction sexuée. Démontrer que la densité de population tend vers l'infini au bout d'un temps fini.

III.1.5 Dynamique d'une population exploitée

Supposons qu'en absence d'exploitation, la population obéit à l'équation logistique avec un taux de croissance r et une capacité limite K . L'exploitation de la population, par pêche ou chasse par exemple, conduit à ajouter un terme négatif dans l'équation. Ce terme correspond à l'effectif prélevé par unité de temps par exploitation. Il y a deux types d'exploitations.

- ☞ Exploitation à effort constant : La solution la plus simple consiste à ajouter un terme négatif proportionnel à l'effectif :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex,$$

où $E > 0$ est l'effort d'exploitation.

- ☞ Exploitation à prélèvement constant : l'hypothèse consiste à effectuer un prélèvement constant par unité de temps, ce qui correspond à la notion de quota :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Q,$$

où $Q > 0$ est le quota par unité de temps.

III.2 Deux populations en interaction

Nous considérons à présent deux populations d'effectif respectif $x(t)$ et $y(t)$ en interaction. Ce modèle est décrit par un système de deux équations différentielles. D'une manière assez générale, il est usuel de décomposer chaque équation en une somme de deux termes, le premier terme correspondant à la croissance de la population isolée et le second terme représentant les interactions entre les deux populations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + h(x, y) \\ \dot{y} &= g(y) + k(x, y).\end{aligned}$$

Ainsi les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ représentent les croissances des populations isolées et ne dépendent que de l'effectif de cette population alors que les termes $h(x, y)$ et $k(x, y)$ correspondent aux interactions entre les populations et dépendent des effectifs des deux populations. Si la population d'effectif x vit dans un milieu avec une ressource limitée, on choisira par exemple une fonction de croissance de type logistique :

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

où r et K sont respectivement le taux de croissance et la capacité limite du milieu.

Si la population d'effectif y est caractérisée par une mortalité naturelle avec un taux constant m , on choisira :

$$g(y) = -my.$$

Le choix des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ dépend de la nature de l'interaction entre les deux populations. On distingue des interactions positives (resp. négatives) qui favorisent (resp. défavorisent) la croissance d'une population. Les signes des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$ rendent compte de ce caractère favorable ou non à la croissance.

Trois cas sont donc possibles :

- ☞ les deux fonctions sont négatives : une population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre. C'est le cas de la croissance interspécifique.
- ☞ les deux fonctions sont de signes contraires : une population a un effet positif sur la croissance de l'autre mais on a l'effet inverse dans l'autre sens. Il s'agit par exemple des relations proie-prédateur ou encore hôte-parasite.
- ☞ les deux fonctions sont positives : chaque population favorise la croissance de l'autre population. C'est le cas de mutualisme ou encore de la symbiose.

Il existe des cas où l'une des fonctions est nulles habituellement appelés commensalisme et amensalisme.

Dans le cas de la prédation, il est usuel de considérer que les proies et les prédateurs se déplacent en explorant leur milieu au hasard. Cela conduit à un modèle de type *action de masse* où le nombre moyen de rencontres entre les deux populations est proportionnel au produit des effectifs. De ce fait, on doit avoir un terme négatif dans l'équation de la proie, puisqu'il y a disparition des proies mangées par les prédateurs, du type :

$$h(x, y) = -axy,$$

où a est un paramètre constant et positif qui rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques.

Une telle fonction de prédation est appelée une fonction de lotka-Volterra ou encore de type I . Dans l'équation de prédateur, on doit s'attendre à un terme positif de même forme car les proies tuées sont assimilées par les prédateurs et leur permettent de maintenir la croissance de leur population. Cela conduit par exemple à :

$$g(x, y) = -eh(x, y) = eaxy,$$

qui signifie que la biomasse (ici l'effectif) des proies tuées se trouve transformée en biomasse (effectif) du prédateur avec une certaine efficacité dont rend compte le paramètre constant e , appelé couramment le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur.

Avec les hypothèses précédentes, on obtiendrait finalement le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy, \\ \dot{y} &= -my + eaxy. \end{aligned}$$

Ce modèle est un modèle classique proie-prédateur que nous allons étudier.

III.2.1 Modèle de lotka-Volterra

Ce modèle fait hypothèse qu'en absence de prédateurs, la croissance des proies est illimitée, soit :

$$f(x) = rx,$$

dont la solution est $x(t) = x(0) \exp(rt)$, avec $r > 0$ le taux de croissance des proies.

Le modèle suppose une mortalité naturelle du prédateur qui ne peut donc pas survivre en absence de proie :

$$g(y) = -my,$$

dont la solution $y(t) = y(0) \exp(-mt)$, où $m > 0$ est le taux de mortalité naturelle du prédateur. Ainsi, en l'absence du prédateur, les proies pulluleraient et leur effectif va donc pouvoir être régulé par des

prédateurs. En l'absence de proies, les prédateurs disparaîtront. Le couplage des deux populations par les termes de prédateurs peut avoir des effets stabilisateurs sur la dynamique globale du système de deux population en interaction.

Dans ce modèle, il est aussi supposé que le terme d'interaction est un terme classique de lotka-Volterra. Avec ces hypothèses, le modèle de lotka-Volterra s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - axy, \\ \dot{y} &= -my + eaxy,\end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r(x - ay), \\ \dot{y} &= y(-m + bx),\end{aligned}$$

avec $b = ea$. Le fait de pouvoir mettre x en facteur dans la première équation et y dans la seconde est important parce que cela signifie que les axes sont isoclines zéro du système. En conséquence, aucune trajectoire ne peut couper ni l'axe des abscisses ni l'axe des ordonnées. Ainsi, toute trajectoire issue d'une condition initiale prise dans le cadran positif reste, pour tout $t > 0$, à l'intérieur de ce cadran. On dit que le cadran positif est positivement invariant. Ce résultat est important car les variables $x(t)$ et $y(t)$ sont des effectifs et doivent donc rester non négatives pour tout $t > 0$. Le modèle garantit donc qu'en choisissant une condition initiale acceptable, i.e avec des effectifs initiaux positifs ($x(0) > 0$, $y(0) > 0$), les effectifs restent toujours par la suite positifs et ne puissent jamais devenir négatifs, ce qui n'aurait aucune signification du point de vue de la biologie.

Les isoclines zéro sont vles suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\implies x = 0 \text{ ou } y = \frac{r}{a} \\ \dot{y} = 0 &\implies y = 0 \text{ ou } x = \frac{m}{b}.\end{aligned}$$

Sur la figure des isoclines, il est très facile de voir que sur l'axe $x = 0$, on a pour $y > 0$, $\dot{y} = -my < 0$, ce qui veut dire que la composante verticale de la vitesse est négative. On remarquera aussi que la composante horizontale de la vitesse est positive.

Le modèle de lotka-Volterra admet deux points d'équilibre : l'origine correspondant à l'absence de proie et de prédateur, et un point (x^*, y^*) non trivial et appartenant au cadran positif tel que :

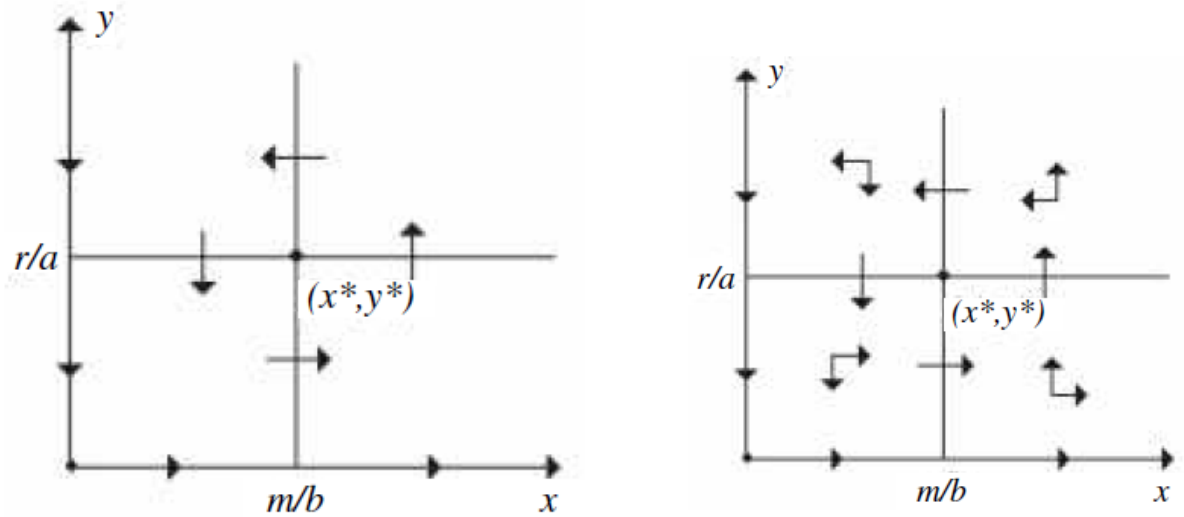
$$\begin{aligned}x^* &= \frac{m}{b} \\ y^* &= \frac{r}{a}.\end{aligned}$$

La matrice Jacobienne est

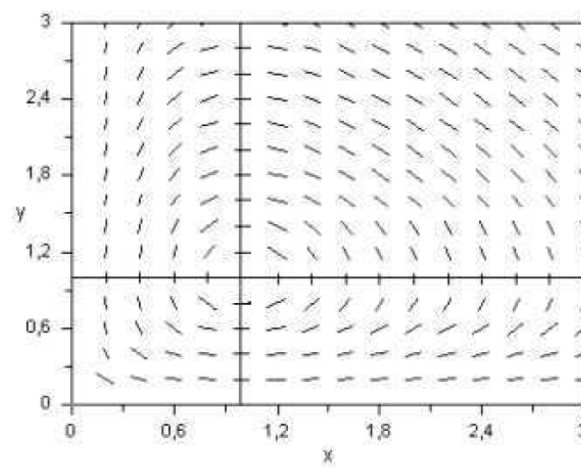
$$\begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}.$$

On remarquera qu'à l'origine, la matrice jacobienne admet deux valeurs propres réelles $r > 0$ et $-m < 0$. Il s'agit donc d'un point selle instable.

Pour le second équilibre, on remarquera que la trace est nulle et le déterminant vaut $mr > 0$. Il s'agit donc d'un centre.



(a) Isoclines zéros du modèle classique de lotka-Volterra (b) Composantes du vecteur vitesse dans le cadran positif



(c) Direction des vecteurs vitesses pour le modèle de lotka-Volterra

FIGURE III.1 – Modèle simple de Lotka-Volterra

Cependant, d'après le théorème de linéarisation, nous ne pouvons pas être certain qu'il existe réellement des trajectoires fermées entourant le point d'équilibre (x^*, y^*) . Il est donc nécessaire de rechercher une intégrale première possédant un extremum au point (x^*, y^*) . On a :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-m + bx)} \quad \text{ou encore} \quad -m \frac{dx}{x} + bdx = r \frac{dy}{y} - ady.$$

On peut prendre comme intégrale première la fonction

$$H(x, y) = -m \ln x - r \ln y + bx + ay.$$

On vérifie que les dérivées premières de H s'annulent en (x^*, y^*) et que les dérivées secondes en ce point d'équilibre sont de même signe positif. En conséquence, le développement limité au second ordre de la fonction $H(x, y)$ au voisinage de (x^*, y^*) est

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) (y - y^*)^2.$$

Ainsi, le signe de $H(x, y) - H(x^*, y^*)$ est constant et positif au voisinage de l'équilibre, ce qui veut dire que $H(x, y)$ présente un minimum local en ce point. Les trajectoires autour de cet équilibre sont les courbes de niveau de l'intégrale première et par conséquent se referment au voisinage de ce point.

On montre que les solutions sont périodiques avec une période T qui est déterminée par la partie imaginaire des valeurs propres de la jacobienne calculée à l'équilibre non trivial. La période vérifie la relation :

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{mb}.$$

III.2.2 Modèle de Lotka-Volterra et croissance logistique

Nous venons d'étudier que le modèle de Lotka-Volterra prévoit des centres, qui sont structurellement instables. cela veut dire que les solutions périodiques pour les effectifs des proies et des prédateurs ne sont pas conservées en général pour de petites perturbations de ce modèle. Pour cette raison, ce modèle n'est pas très satisfaisant. De plus, en absence de prédateurs, la croissance des proies est illimitée, ce qui est irréaliste. On doit plutôt imaginer qu'en absence de prédateurs, la population des proies doit atteindre un équilibre qui dépend des ressources disponibles dans le milieu. Par conséquent, une modification du modèle consiste à choisir une loi de croissance de type logistique pour la population des proies, ce qui conduit au modèle :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - axy \\ \dot{y} &= -my + bxy, \end{aligned}$$

avec $K > 0$ la capacité limite du milieu. Ce modèle peut aussi se factoriser :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(\left(1 - \frac{x}{K} \right) - ay \right) \\ \dot{y} &= y(-m + bx), \end{aligned}$$

et par suite on peut dire que le cadran positif est aussi positivement invariant. Les isoclines sont :

$$y = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{x}{K} \right) \quad \text{ou} \quad x = 0$$

$$x = \frac{m}{b} \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Le sens des vecteurs vitesses sur les isoclines est facile à obtenir puisqu'en absence de prédateurs (soit isocline $y = 0$), l'effectif des proies augmente jusqu'à la capacité K et en absence de proies (isocline $x = 0$), l'effectif des prédateurs diminue. En conséquence, deux cas sont possibles et les équilibres possibles se trouvent à l'intersection des isoclines horizontales et verticales :

1. $m/b < K$, il y a trois points d'équilibre $(0, 0)$, $(K, 0)$ et $(x^* = m/b, y^* = r/a(1 - m/bK))$;
2. $m/b > K$, il n'y a que deux points d'équilibre $(0, 0)$, $(K, 0)$. Il existe un troisième point d'équilibre avec une composante négative.

Comme précédemment, pour connaître la stabilité des équilibre, on calcule la jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - ay & -ax \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

On remarquera que l'origine est un point selle.

En ce qui concerne le point $(K, 0)$, la matrice jacobienne admet des valeurs propres :

$$\lambda_1 = -r < 0 \quad \lambda_2 = -m + bK,$$

1. $m/b < K$, λ_2 est positive et par suite l'équilibre est un point selle ;
2. $m/b > K$, λ_2 est négative et l'équilibre est un nœud stable.

Pour le troisième point (x^*, y^*) , on a

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - ay^* & -ax^* \\ by^* & -m + bx^* \end{pmatrix}.$$

En utilisant les équations qui définissent cet équilibre, on aura

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{rx^*}{K} & -ax^* \\ by^* & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\text{tr}A = -\frac{rx^*}{K} \quad \det A = abx^*y^*.$$

Par conséquent, lorsque le point d'équilibre (x^*, y^*) se trouve dans le cadran positif, nous avons la trace qui est négative et le déterminant positif, ce qui assure la stabilité de cet équilibre.

III.2.3 Modèle proie-prédateur de Holling

La forme assez générale d'un modèle proie-prédateur est

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - h(x, y) \\ \dot{y} &= g(y) + eh(x, y) \end{aligned}$$

où le paramètre e est le taux de la biomasse des proies en biomasses des prédateurs. Il est très utile de considérer le nombre de proies tuées par un seul prédateur par unité de temps qui est aussi appelé

la fonction réponse du modèle proie-prédateur. Dans le modèle en présentation, la fonction de réponse $\Phi(x, y)$ est

$$\Phi(x, y) = \frac{h(x, y)}{y}.$$

Dans le cas particulier du modèle de Lotka-Volterra, la fonction $h(x, y) = axy$ et il vient que :

$$\Phi(x, y) = ax.$$

Il faut remarquer que Φ est proportionnelle à x , cela veut dire que le nombre de proies ingurgitées par un seul prédateur peut être très grand si x est grand. On doit plutôt s'attendre à une limitation du nombre de proies tuées et ingurgitées par un prédateur même si la densité des proies est très forte. Il est donc plus réaliste de concevoir une fonction réponse présentant un effet de saturation avec la densité des proies.

Une telle fonction réponse présentant un plateau pour les fortes densités de proies est dite fonction réponse de type II en opposition à la fonction réponse de Lotka-Volterra appelée de type I. La fonction de type II dite de Holling est de la forme :

$$\Phi(x, y) = \frac{ax}{x + D},$$

où D est une constante positive. Avec une telle fonction réponse, et en conservant les hypothèses du modèle étudié précédemment, on a le modèle de Holling :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{x + D} \\ \dot{y} &= -my + \frac{bxy}{x + D},\end{aligned}$$

avec $b = ea$.

Exercice III.2.1 *Étudier le modèle de Holling dans le cas où le point d'équilibre non trivial est stable.*

III.2.4 Modèle compétition interspécifique

Soient deux populations, par exemple appartenant à deux espèces animales différentes, exploitant la même ressource. Les individus des deux populations sont en compétitions et ainsi chaque population a un effet négatif sur la croissance de l'autre. Le modèle classique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \alpha \frac{y}{K_1}\right) \\ \dot{y} &= r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \beta \frac{x}{K_2}\right),\end{aligned}$$

où r_1 et r_2 sont les taux de croissance des deux populations. Les coefficients α et β sont positifs et caractérisent la force de compétition exercée par une population sur l'autre. On procède généralement au changement de variables :

$$u = \frac{x}{K_1} \quad v = \frac{y}{K_2}.$$

Il vient alors le modèle :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= r_1 u (1 - u - av) \\ \dot{v} &= r_2 v (1 - v - bu),\end{aligned}$$

avec $a = \alpha K_2/K_1$ et $b = \beta K_1/K_2$.

Un changement de variable temps en posant

$$\tau = r_1 t$$

conduit au système

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u (1 - u - av) \\ \frac{dv}{d\tau} &= r v (1 - v - bu),\end{aligned}$$

où $r = r_2/r_1$. Cette opération de changement de variables et d'échelle de temps s'appelle une opération de redimensionalisation ou de renormalisation. Elle permet de simplifier le modèle initial écrit sous forme *biologique* pour le mettre sous une forme plus simple avant d'en faire l'étude mathématique.

III.3 Modèle de Communauté

III.3.1 Critère de Routh-Hurwitz

On sait que la condition de stabilité d'un point d'équilibre nécessite de vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont de partie réelle négative. Il existe aussi des critères permettant de conclure de la stabilité locale d'un équilibre sans calculer explicitement les valeurs propres.

Soit le système linéaire de dimension n :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle

$$\dot{x} = Ax,$$

avec $A_{ij} = a_{ij}$.

Dans notre étude, on a $\det A \neq 0$, ce qui suppose que l'origine est le seul point d'équilibre. La matrice A admet n valeurs propres et le polynôme caractéristique peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0.$$

Considérons les n déterminants suivants :

$$\begin{aligned}H_1 &= \alpha_1 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$H_k = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & . & . & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & . & . & . \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & . & . & . \\ 0 & 1 & \alpha_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \alpha_k \end{vmatrix}$$

L'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout k , le déterminant H_k est strictement positif.

III.3.2 Modèle de communauté

Étudions à présent le cas d'un système de plus de deux populations en interaction. Le cas le plus simple est celui d'une proie, d'un prédateur et d'un super prédateur qui mange le prédateur. On parle d'une chaîne trophique à trois niveaux. Un modèle simple est celui de Lotka-Volterra avec des fonctions réponse de type I :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(r - ay) \\ \dot{y} &= y(-m + bx - cz) \\ \dot{z} &= sz\left(1 - \frac{z}{K}\right) + dyz, \end{aligned}$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les effectifs respectifs de la proie, du prédateur et du super prédateur.

Avec le changement de variables et d'échelle des temps :

$$u = x, \quad v = y, \quad w = \frac{z}{K} \quad \text{et} \quad \tau = st,$$

on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(\rho - \alpha v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v(-\mu + \beta u - \gamma w) \\ \frac{dw}{d\tau} &= w(1 - w) + \delta vw, \end{aligned}$$

avec

$$\rho = \frac{r}{s}, \quad \alpha = \frac{a}{s}, \quad \mu = \frac{m}{s}, \quad \beta = \frac{b}{s}, \quad \gamma = \frac{cK}{s} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{d}{s}.$$

Les plans $u = 0$, $v = 0$ et $w = 0$ sont isoclines zéros. Aucune trajectoire ne peut donc les traversées, ce qui implique que le cadran strictement positif reste positivement invariant.

Les isoclines vérifient

$$\begin{aligned} u(\rho - \alpha v) &= 0 \\ v(-\mu + \beta u - \gamma w) &= 0 \\ w(1 - w + \delta v) &= 0 \end{aligned}$$

L'origine est donc un équilibre et l'unique équilibre non trivial dans le cadran positif (u^*, v^*, w^*) est tel que

$$u^* = \frac{\mu}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma\rho}{\alpha}\right), \quad v^* = \frac{\rho}{\alpha}, \quad w^* = 1 + \frac{\delta\rho}{\alpha}.$$

Pour déterminer la stabilité de ce point, on calcule la matrice jacobienne en ce point :

$$A = \begin{pmatrix} \rho - \alpha v^* & -\alpha u^* & 0 \\ \beta v^* & -\mu + \beta u^* - \gamma w^* & -\gamma v^* \\ 0 & \delta w^* & 1 - 2w^* + \delta v^* \end{pmatrix}.$$

En tenant compte des équations qui définissent cet équilibre, on a la matrice plus simple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha u^* & 0 \\ \beta v^* & 0 & -\gamma v^* \\ 0 & \delta w^* & -w^* \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^3 + w^* \lambda^2 + (\alpha\beta u^* v^* + \alpha\delta v^* w^*) \lambda + \alpha\beta u^* v^* w^* = 0.$$

Pour utiliser le critère de Routh-Hurwitz, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= w^* \\ \alpha_2 &= \alpha\beta u^* v^* + \alpha\delta v^* w^* \\ \alpha_3 &= \alpha\beta u^* v^* w^*. \end{aligned}$$

En utilisant les critères de Routh-Hurwitz, on aura

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_1 \\ H_2 &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \\ H_3 &= \alpha_3, \end{aligned}$$

qui sont tous positifs. Nous pouvons donc affirmer que le point d'équilibre non trivial (u^*, v^*, w^*) appartenant au cadran positif est localement asymptotiquement stable.

Exercice III.3.1 *En utilisant les critères de Routh-Hurwitz, démontrer que le point d'équilibre non trivial appartenant au cadran positif du système suivant est localement asymptotiquement stable :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(r - ay) \\ \dot{y} &= y(-m + bx - cz) \\ \dot{z} &= z(-n + dy - ft) \\ \dot{k} &= sk \left(1 - \frac{k}{K}\right) + gzk. \end{aligned}$$

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ et $k(t)$ sont respectivement les effectifs de la proie, du prédateur, du super prédateur et du super-super prédateur.

Bibliographie

- [1] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.
- [2] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. (German) [*On the electrodynamics of moving bodies*]. Annalen der Physik, 322(10) :891–921, 1905.
- [3] Knuth : Computers and Typesetting,
<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>