

MTH 223/Séance 6

Y. Mensah

20 juillet 2020

Paramétrisation

Définition

Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

est appelé support géométrique γ et γ est appelé une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

Exemple

Paramétrisations du quart de cercle entre $(R, 0)$ et $(0, R)$.

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (Rt, R\sqrt{1-t^2})$$

et

$$\beta : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$$

Tangente et régularité

Proposition

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $t_0 \in I$ telle que $\gamma'(t_0) \neq 0$. Alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à γ en $\gamma(t_0)$.

Définition

Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe $\mathcal{C}^1$ est dite régulière si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Remarque

Toute courbe régulière admet une tangente en chacun de ses points. La réciproque est fautive : Considérer la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^4)$. Elle admet une tangente en $\gamma(0)$ bien que $\gamma'(0) = 0$.

Longueur d'un arc de courbe

La longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est par définition

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_k = b} \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})} \right\|, \quad (1)$$

ou le sup est pris sur toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. La formule suivante permet le calcul de la longueur d'une courbe à l'aide d'une intégrale.

Proposition

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (2)$$

Exercice

Déterminer la longueur de l'hélice paramétrée

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (R \cos t, R \sin t, at).$$

$$\text{Réponse : } 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$$