



Faculté Des Sciences
Département de Physique

Domaine : Sciences et Technologies

Parcours : Physique

Etablissement : Faculté des Sciences

UE PHY 110 : Magnétostatique et Régimes Variables

Support de Cours

Crédits : 4 Crédits (48h : Cours 24h - TD 24h)

Public cible : Etudiants de Licence du parcours Physique

Semestre : 2

Pré-requis : Aucun

Enseignant responsable de l'UE : Dr Yendoubé LARE (MC)

Disponibilité : (jeudi et vendredi : 9h00-12h00)

Année universitaire 2019-2020

CHAPITRE 1 : LE CHAMP MAGNETIQUE

I- Introduction

Dans la partie électrostatique, nous nous sommes intéressés au comportement des charges électriques immobiles. Dans cette partie de notre étude, nous allons nous intéresser à une interaction nouvelle qui apparaît entre courants électriques, c'est-à-dire entre charges électriques en mouvement. C'est le domaine du magnétisme. Notre étude se limitera à la magnétostatique, c'est-à-dire à la description des phénomènes magnétiques indépendants du temps.

1- Historique

Les premières observations du magnétisme remontent à l'antiquité. Les grecs, notamment Thalès de Milet avait remarqué qu'un minéral extrait d'un gisement proche de la ville de Magnésia (ouest de la Turquie actuelle) possédait la propriété d'attirer le fer. Ce minéral nommé magnétite est l'oxyde de fer(II, III) de formule chimique Fe_3O_4 (minéral noir cristallisé).

Au VI^{ème} siècle avant notre ère, les propriétés de la magnétite avaient déjà retenu l'attention des chinois. Ils avaient aussi remarqué qu'une aiguille aimantée avait la propriété de s'orienter selon la direction *Nord – Sud*. Ils furent ainsi les premiers à exploiter cette propriété d'une aiguille aimantée pour fabriquer la boussole appelée « aiguille de sud ». Les premières boussoles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau dans un récipient gradué. Utilisée ensuite par les Arabes, la boussole arrive en occident au XI^{ème} siècle.

Au XVIII^{ème} siècle, Franklin découvre la nature électrique de la foudre (1752) et déduit l'existence d'une relation entre les phénomènes électriques et magnétiques. L'existence de cette hypothèse a été mise en évidence par Oersted en 1820. Toutefois, il faut attendre la fin du XIX^{ème} pour qu'une théorie complète apparaisse, **la théorie de l'électromagnétisme**.

L'élaboration de la théorie électromagnétique a mis en jeu un grand nombre de physiciens comme Oersted, Ampère, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Maxwell, Weber, Helmholtz, Hertz, Lorentz, etc.

2- Expérience d'Oersted (*Hans Christian Oersted ; 1777 – 1851*)

Le physicien danois Oersted en étudiant en 1820 les effets du courant électrique dans un fil, observa que le passage d'un courant dévie l'aiguille aimantée d'une boussole placée à proximité du fil conducteur.

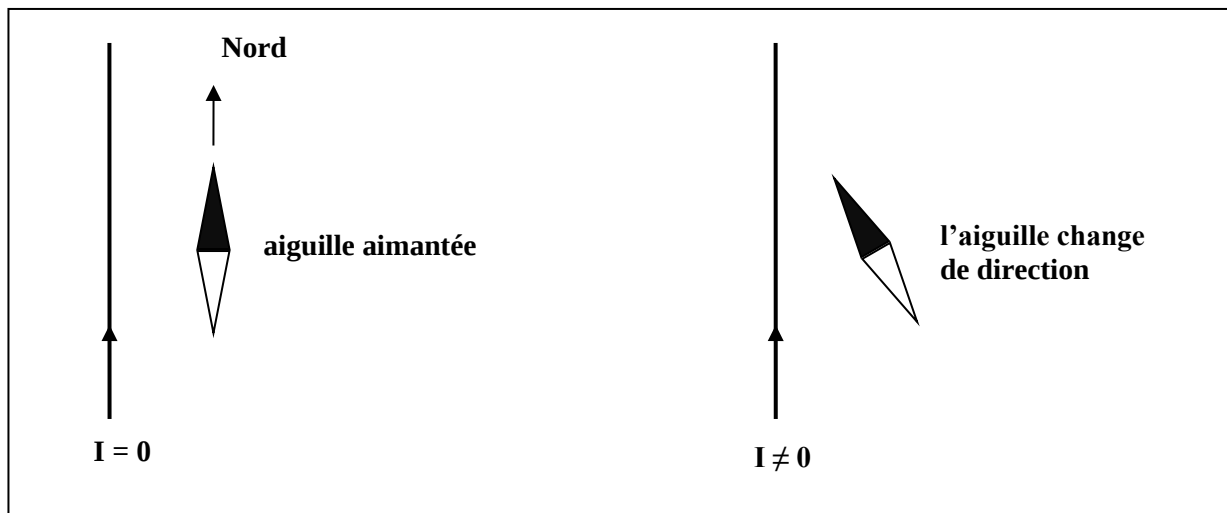


Figure 1. 1 - Schéma de l'expérience d'Oersted

Il remarque que la déviation change de sens lorsque l'on inverse le sens du courant et que l'aiguille indique le *Nord* géographique lorsqu'on coupe le courant. Il constate aussi que la force qui dévie l'aiguille est non radiale. Cette expérience révolutionnaire démontre qu'il y a une relation entre le courant électrique et le champ magnétique et marque ainsi le début de l'électromagnétisme.

3- Expérience d'Ampère

Considérons deux fils rectilignes infinis (par « fils infinis », nous entendons des fils longs devant la distance les séparant) parcourus respectivement par les courants électriques constants I_1 et I_2 (figure 1.2) et étudions leur interaction en fonction de l'orientation relative des fils, de leur distance (r qui les sépare) et de l'intensité des courants qui y circulent.

Si les deux fils sont parallèles, il existe en chaque point des fils une force qui leur est perpendiculaire.

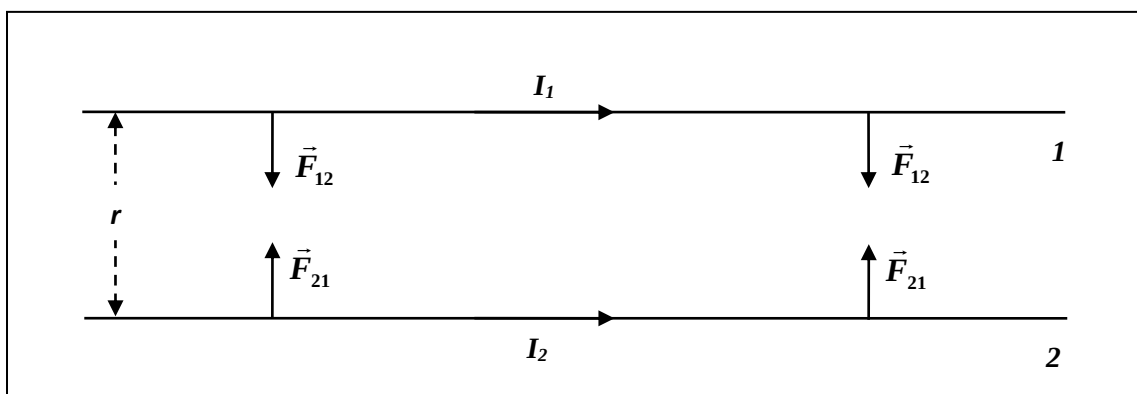


Figure 1. 2 - Forces magnétiques entre fils rectilignes parcourus par des courants constants.

Cette force est attractive si les conducteurs sont parcourus par des courants de même sens et répulsive dans le cas contraire. Son intensité est la même en tout point et est proportionnelle à $\frac{I_1 I_2}{r}$. La force disparaît lorsque les fils sont perpendiculaires.

La découverte d'Oersted et l'analyse faite par Ampère apportaient une idée nouvelle : la **force** qui dévie l'aiguille est non radiale mais **transversale**.

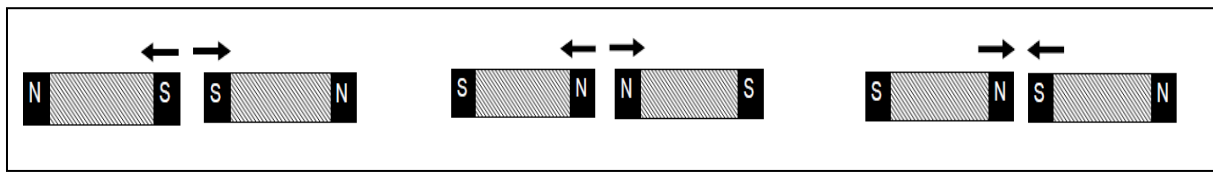
4- Aimants

Un aimant est un corps capable d'attirer le fer, le nickel, le cobalt et certains alliages contenant beaucoup de fer (ces corps sont appelés corps ferromagnétiques). Cette attraction est appelée **force magnétique**. Les effets magnétiques procèdent d'une interaction à distance et peuvent être décrits à l'aide d'un champ.

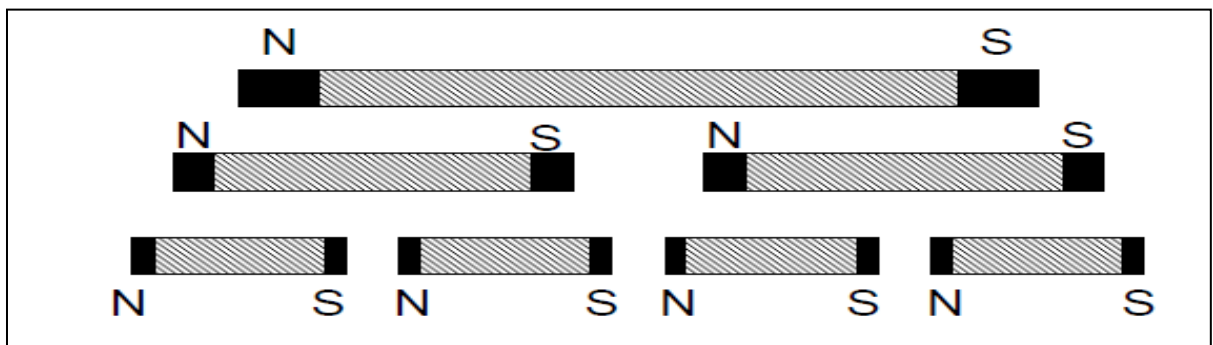
On distingue des aimants naturels (magnétite) et des aimants artificiels (barreau aimanté, l'aimant en U, l'aiguille aimantée). La terre aussi est un aimant.

Un aimant est toujours constitué de **deux pôles** : le **pôle Nord (N)** et le **pôle Sud (S)**.

Deux pôles identiques se repoussent et deux pôles différents s'attirent.



Les aimants n'existent qu'en paires c'est-à-dire qu'il est impossible de séparer le pôle sud du pôle nord d'un aimant. En effet, si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.



Remarque : Lorsque l'aimant est mobile (aiguille aimantée), il s'oriente tel que son pôle N pointe vers le pôle Nord géographique.

II- Notion de champ magnétique

Une seule grandeur est nécessaire pour décrire les effets magnétiques observés en un point de l'espace.

Il s'agit d'un champ vectoriel appelé **champ magnétique** que nous désignerons par $\vec{B}$.

Remarque : Dans les normes internationales de terminologie en électromagnétisme, le vecteur $\vec{B}$ est plutôt appelé induction (ou flux) magnétique et le champ magnétique est désigné par le vecteur $\vec{H}$ avec,

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

μ : Perméabilité magnétique du milieu ($\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et μ_r perméabilité relative du milieu),

$\vec{H}$: Champ magnétique,

$\vec{B}$: Induction ou flux magnétique.

1- Force de Lorentz – Définition du champ magnétique

Considérons une charge ponctuelle q en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donné. Supposons que cette charge soit soumise à l'action d'autres charges en mouvement par rapport à ce référentiel ou à l'action d'un corps aimanté. Cette charge en mouvement subit une force perpendiculaire à $\vec{v}$ et dont la norme est proportionnelle au produit $q \cdot v$. Cette force est appelée force de Lorentz ($\vec{F}_m$).

On définit le champ magnétique $\vec{B}$ par la relation :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Lorsque la force magnétique est exprimée en *Newton*, la charge en *Coulomb* et la vitesse en *m/s*, le **champ magnétique est en Tesla de symbole T**.

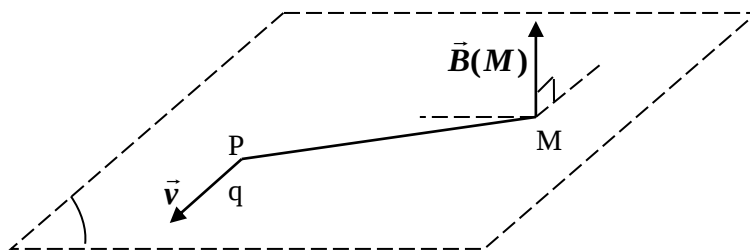
Le champ est aussi couramment exprimée en une autre unité appartenant au système *CGS*, le *gauss* de symbole G.

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

2- Expression du champ magnétique

a) Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M de l'espace par une particule chargée q située en un point P et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est :



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

où μ_0 est la **perméabilité magnétique du vide** et vaut :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad \text{où H=Henry}$$

μ_0 , la permittivité du vide ϵ_0 et la vitesse de la lumière c sont reliées par :

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

- Le champ $\vec{B}$ est **perpendiculaire** au plan défini par $(\vec{v}, \overrightarrow{PM})$; son unité usuelle est le **Tesla (T)**.
- De même que pour le champ électrostatique, le **principe de superposition** s'applique au champ magnétique.
- Du fait du produit vectoriel, le champ magnétique est un **pseudo-vecteur**.

❖ Ordre de grandeur de quelques champs magnétiques

- ✓ Electro-aimant dans l'entrefer (bobines de Helmholtz) : 0,1 T à 2 T
- ✓ Champ magnétique terrestre :
 $B_{vertical} = 0,4 \text{ G} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et $B_{horizontal} = 0,2 \text{ G} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
- ✓ Bobine supraconductrice : 5 T à 50 T

b) Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

Considérons un ensemble N de charges ponctuelles q_i situées en des points P_i et de vitesse $\vec{v}_i$. Il en résulte du principe de superposition que le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

Dans le cas d'une distribution continue de charges dans un volume V , nous pourrions assimiler tout volume élémentaire dV , situé autour d'un point P' de la distribution de charges en mouvement à une charge dq animée d'une vitesse moyenne $\vec{v}$. Le champ magnétique devient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v} \wedge \overrightarrow{P' M}}{\|\overrightarrow{P' M}\|^3}$$

A partir de cette dernière expression, on établit l'expression générale du champ magnétique créé par une distribution volumique de charges.

Nous savons que : $dq = \rho dV \Rightarrow dq \vec{v}(P) = \rho \vec{v}(P) dV$

Or : $\rho \vec{v}(P) = \vec{j} = \text{densité volumique de courant (locale)}$

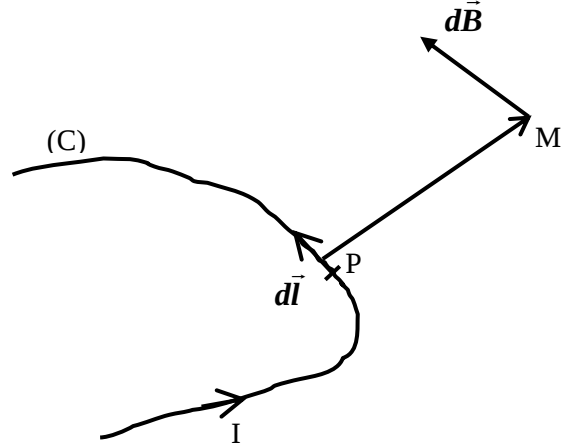
D'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dV$$

c) Champ magnétique créé par un circuit quelconque - Loi de Biot et Savart (1820)

Cette loi permet de calculer en tout point de l'espace le champ $\vec{B}$ produit par une distribution de courants.

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant permanent I et notons $d\vec{l}$ un déplacement élémentaire (centré sur un point P) le long de ce circuit orienté dans le même sens que le courant. On appelle **élément de courant**, le vecteur $d\vec{C} = I d\vec{l}$. $d\vec{C}$ est à l'origine du champ magnétique $\vec{B}$. Le champ élémentaire $d\vec{B}(M)$ créé en un point M par une distribution de courants est donné par la loi de **Biot et Savart** :



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

Remarque 1 :

- Dans le cas d'une distribution de courant surfacique ;

$$d\vec{C} = \vec{j}_s ds;$$

avec $\vec{j}_s$ le vecteur densité surfacique de courant et ds la surface élémentaire. Le champ élémentaire $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s ds \wedge \vec{r}}{r^3}$$

- Pour une distribution de courant volumique,

$$d\vec{C} = \vec{j} d\tau;$$

avec $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant et $d\tau$ le volume élémentaire. Le champ élémentaire $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau \wedge \vec{r}}{r^3}$$

- Le **champ magnétique total** pour chaque type de distribution C de courant est donné par :
 - Distribution filiforme (linéique) :

$$\vec{B}(M) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

- Distribution surfacique :

$$\vec{B}(M) = \iint_C \frac{\mu_0 \vec{J}_s ds \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

- Distribution volumique :

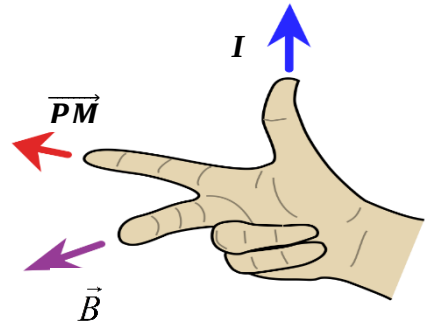
$$\vec{B}(M) = \iiint_C \frac{\mu_0 \vec{J} d\tau \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Remarque 2 :

En pratique, pour connaître la direction et le sens du champ magnétique en un point M quelconque, on utilise l'une des règles suivantes :

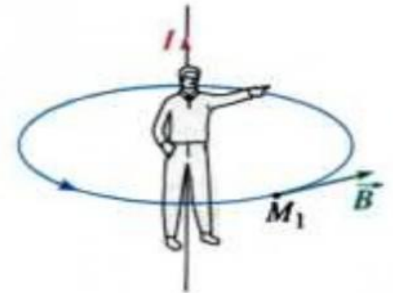
- La règle des trois doigts "de la main droite" :

Le courant entre par la base du pouce et ressort par son extrémité ; l'index indique le sens du vecteur $\vec{PM}$ et le sens de $\vec{B}$ est donné par le majeur. Le pouce, l'index et le majeur formant une base orthogonale directe



- Règle du bonhomme d'Ampère :

Le bonhomme est placé sur le fil de sorte que le courant le traverse des pieds vers la tête, il regarde dans la direction du point M_1 et le sens de $\vec{B}$ est donné par son bras gauche.

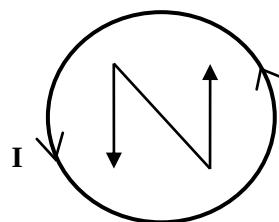


- Règle du tire-bouchon :

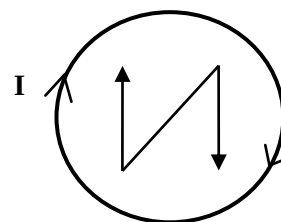
Cette règle relie un sens de rotation et un sens de translation. En associant une des deux opérations au courant (rotation ou translation), l'autre opération (rotation ou translation) donne le sens du champ.

- Règle des pôles magnétiques :

La face nord d'une boucle de courant est par convention celle d'où on voit le courant tourner dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On repère aussi la face *Nord* en inscrivant la lettre "N" dans le sens du courant sur cette face et la face *Sud* est repérée en inscrivant la lettre "S". Le champ $\vec{B}$ rentre par la face *Sud* et sort par la face *Nord*.



Face Nord



Face Sud

3- Invariances et symétries du champ magnétique

Les propriétés d'invariance et de symétrie sont fondamentales dans le calcul du champ magnétique car elles permettent de réduire le nombre de variables pertinentes nécessaires pour décrire les variations des différentes composantes du champ $\vec{B}$ et de connaître la direction et le sens de celui-ci.

a) Invariances

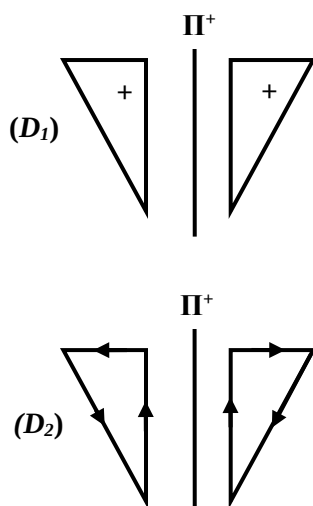
Tout comme le champ électrostatique, le champ magnétique présente les invariances suivant la distribution de courants. Ainsi s'il existe un axe autour duquel une rotation d'angle θ laisse invariante la distribution de courants, le champ magnétique ne dépendra pas lui non plus de l'angle θ ; c'est-à-dire si le circuit est invariant par rotation d'un angle θ autour d'un axe Oz , alors le champ magnétique créé au point M est indépendant de θ .

De même, s'il existe un axe pour lequel toute translation laisse invariante la distribution de courant, le champ magnétique ne dépendra pas de la variable de cette translation ; c'est-à-dire si le circuit est invariant par translation parallèlement à Oz , alors le champ magnétique créé au point M est indépendant de l'abscisse z de M .

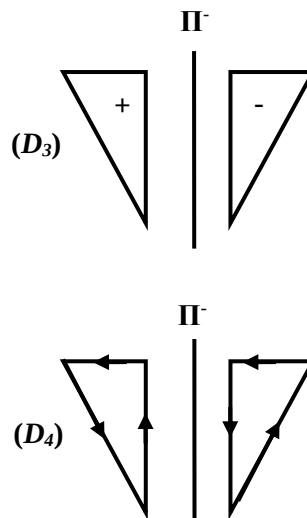
b) Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

- Une distribution de charge (D_1) ou de courant (D_2) admet un plan de symétrie positive Π^+ ou plan de symétrie si dans la symétrie par rapport à Π^+ :
 - La répartition géométrique est conservée.
 - Le signe des charges ou le sens des courants sont inchangés.
- Une distribution de charges (D_3) ou de courant (D_4) admet un plan de symétrie négative Π^- ou plan d'antisymétrie si dans la symétrie par rapport à Π^- :
 - La répartition géométrique est conservée.
 - Le signe des charges ou le sens des courants sont changés.

Plan de symétrie



Plan d'antisymétrie



Remarques :

- Le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à un plan de symétrie de la distribution de courant passant par M .
- Le champ $\vec{B}(M)$ appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant passant par M .
- Le champ $\vec{B}$ est transformé en son antisymétrique par un plan symétrique (Π^+) :

$$\vec{B}(M') = -\text{sym } \vec{B}(M)$$

- Le champ $\vec{B}$ est transformé en son symétrique par un plan antisymétrique (Π^-) :

$$\vec{B}(M') = \text{sym } \vec{B}(M)$$

c) Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les effets ont au moins les éléments de symétries des causes.

Par **causes**, il faut comprendre les sources (charges électriques, courants électriques, etc.) et par **effets**, les conséquences (force, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$, etc.) résultant de la présence de ces sources.

d) Vecteurs et pseudo-vecteurs

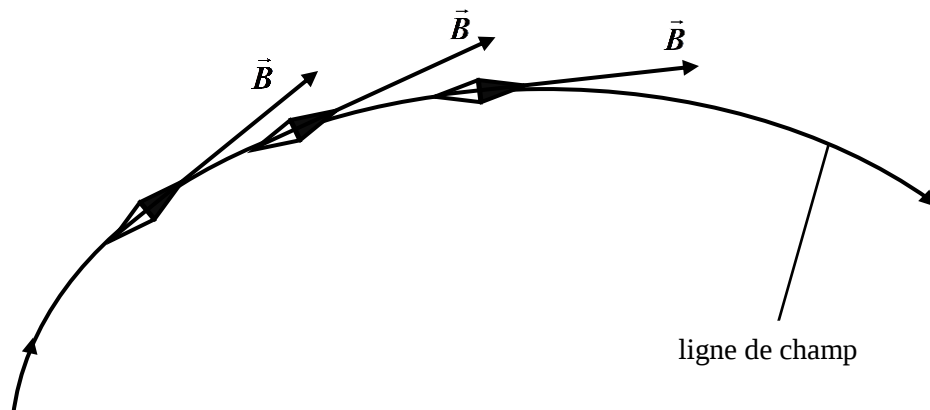
Un vecteur polaire, ou vrai vecteur, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés. Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité de courant.

Un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une *convention d'orientation d'espace* et dépend donc de cette convention.

Exemples : le vecteur rotation instantanée, le champ magnétique, la normale à une surface.

4- Lignes de champs magnétiques

Par définition, les lignes de champ du champ magnétique sont l'ensemble des courbes « en tout point » tangentes à $\vec{B}$.

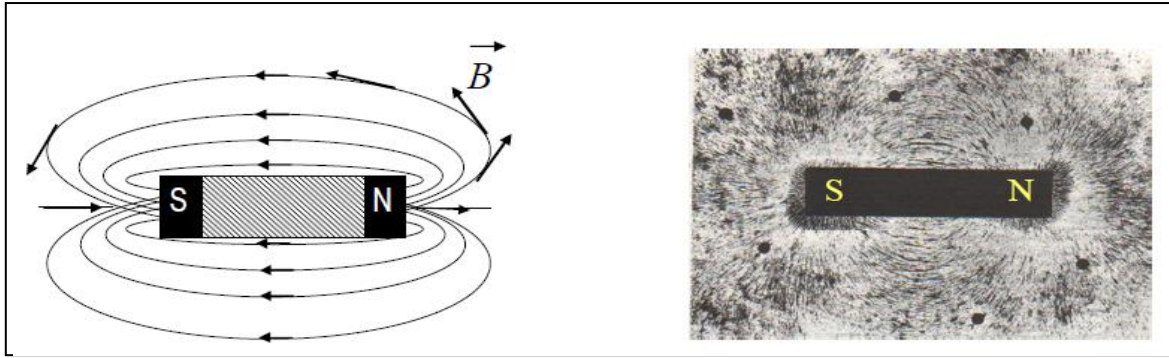


L'équation d'une ligne de champ magnétique est donnée par :

$$\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

où $\overrightarrow{dM}$ est un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ.

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud. On peut visualiser les lignes de champ magnétique en saupoudrant de la limaille de fer sur une plaque isolant (verre, plexiglas) située dans la zone de champ à étudier.



Remarque : Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{B}(M)$ non défini.

III- Champ magnétique terrestre

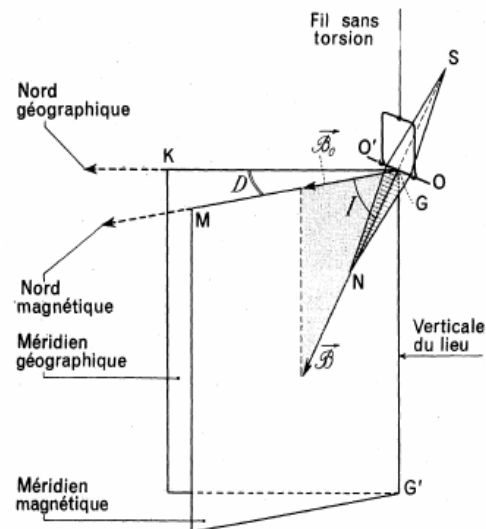
La Terre possède un champ magnétique produit par les mouvements de convection de son noyau externe (composé essentiellement de fer et de nickel liquide) qui se comporte comme une gigantesque dynamo auto-excitée.

1- Existence de direction du champ magnétique terrestre

Une aiguille aimantée, suspendue par son centre de gravité à un fil sans torsion et placée loin de tout autre aimant, de tout circuit parcouru par un courant et de toute masse importante de fer, s'oriente dans une direction qui n'est pas horizontale mais qui, dans l'hémisphère nord, pointe vers la Terre. Cette action subie par une aiguille aimantée décèle donc l'existence d'un champ magnétique à la surface de la Terre.

Le champ magnétique terrestre d'un lieu est caractérisé par un vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ayant pour direction et sens ceux de l'axe Sud-Nord de l'aiguille aimantée.

On appelle *méridien magnétique* d'un lieu le plan vertical contenant le vecteur champ magnétique terrestre $\vec{B}$ en ce lieu. Il ne se confond généralement pas avec le *méridien géographique* du lieu, plan défini par la verticale du lieu et la ligne des pôles terrestres ; ceci revient à dire que l'horizontale GM du méridien magnétique n'a pas tout à fait la direction de l'horizontale GK qui indique le Nord géographique.



2- Déclinaison et inclinaison magnétiques

L'angle D que fait le méridien magnétique avec le méridien géographique est appelé *déclinaison magnétique* du lieu considéré. La déclinaison est dite occidentale ou orientale suivant que le méridien magnétique est à l'ouest ou à l'est du méridien géographique.

L'*inclinaison magnétique* d'un lieu est l'angle I que fait le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ avec l'horizontal. Elle est positive quand le pôle nord de l'aiguille aimantée pointe vers le sol, c'est le cas dans l'hémisphère Nord, elle est négative dans le cas contraire.

3- Composante horizontale du champ magnétique terrestre

La composante horizontale du champ magnétique terrestre est la projection B_0 du vecteur $\vec{B}$ sur l'horizontal.

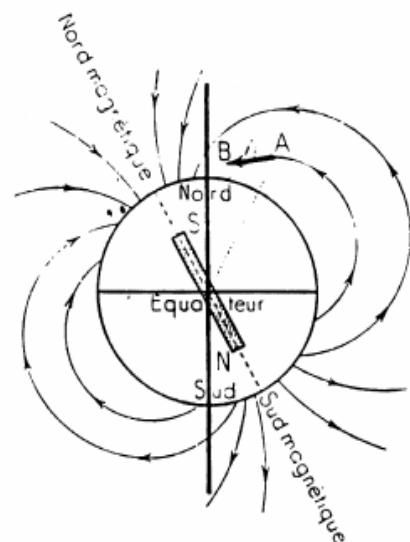
Elle est très importante en pratique car, dans la plupart des appareils comportant une aiguille aimantée, celle-ci est mobile autour d'un axe vertical et astreinte à rester horizontale. Sur une telle aiguille tout se passe comme si la composante horizontale B_0 agissait seule ; elle définit ce que l'on appelle souvent la direction du *Nord magnétique*.

En France, elle vaut environ : $B_0 = 2.10^{-5}$ tesla.

4- Distribution générale du champ magnétique terrestre

La distribution générale du champ terrestre rappelle celle qui serait due à un aimant situé au centre de la Terre, disposé suivant un diamètre ne coïncidant pas exactement avec la ligne des pôles terrestres mais dont le pôle nord serait situé au Nord Ouest du Groenland.

Sur la figure ci-contre, donnant une représentation du spectre magnétique terrestre, on voit que les lignes de forces du



champ rentrent dans la terre au pôle nord magnétique qui devrait donc, pour cette raison, être appelé un pôle sud magnétique.

Remarque :

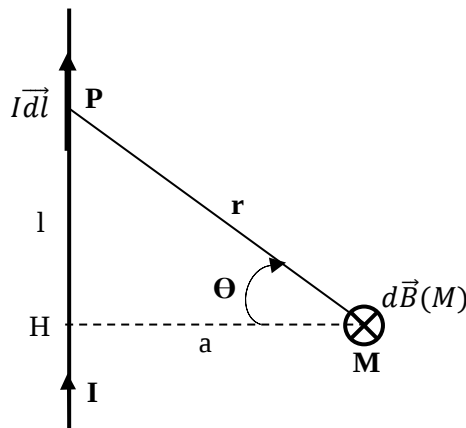
Les caractéristiques du vecteur champ magnétique terrestre $\vec{B}$ varient à la surface de la Terre et, en un lieu donné, avec le temps.

VI- Exemples de calcul du champ magnétique

Exercice1 : Champ magnétique créé par un fil infini

Soit un fil infini parcouru par un courant permanent d'intensité I . Déterminer le champ $\vec{B}$ en un point M situé à une distance a du fil.

Réponse



- Direction de $\vec{B}$:

Soit H la projection du point M sur le fil. Le plan défini par HM et le fil est le plan de symétrie de la distribution de courant I . Ainsi, $\vec{B}$ en M est perpendiculaire à ce plan.

- Sens :

D'après la règle du tire-bouchon en associant sa translation au courant et en tournant dans le sens trigonométrique $\vec{B}$ est entrant.

- Module : D'après la loi de Biot et Savart un élément de courant $I d\vec{l}$ va créer un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ en M , avec :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos \theta}{r^2}$$

$$\text{Or : } \tan \theta = \frac{l}{a} \Rightarrow dl = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{et } \cos \theta = \frac{a}{r}$$

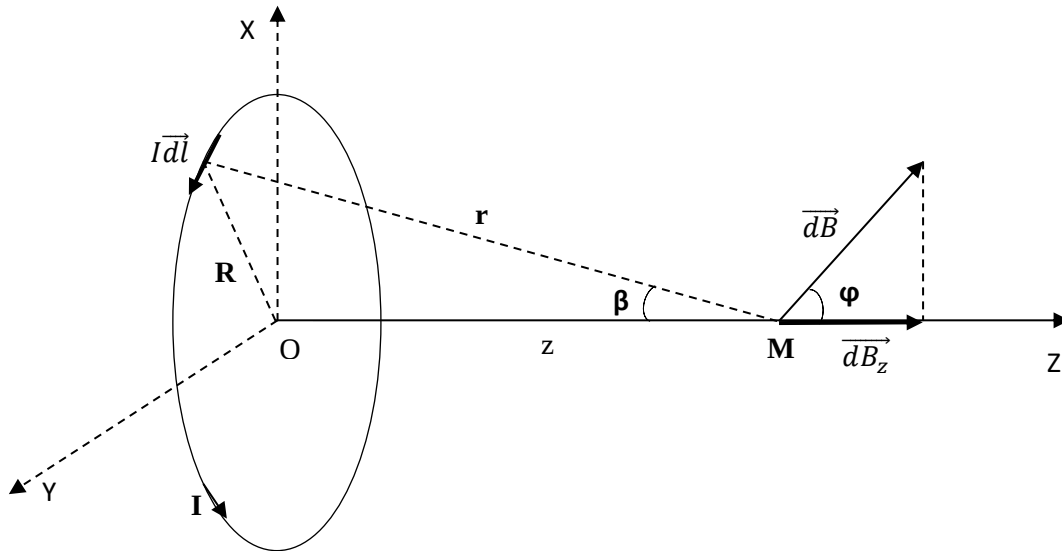
$$\text{Ainsi : } B(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{a} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Exercice2 : Champ magnétique créé par une spire circulaire

Soit une spire de rayon R et d'axe (Oz) parcourue par un courant d'intensité I .

- 1) Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ? Conclure.
- 2) Calculer le champ magnétique en un point M de l'axe en fonction de l'angle β sous lequel on voit le rayon de la spire depuis M .

Réponse



1) Plans de symétries : plan (xOy) .

Plans d'antisymétries : plans (xOz) et (yOz) .

Invariances : Il existe une invariance par rotation autour de l'axe (Oz) .

Conclusion :

i) On constate que tout plan contenant l'axe de révolution est un plan d'antisymétrie pour la spire ce qui implique que le champ $\vec{B}(M)$ est porté par l'axe Oz .

ii) **Note très importante** : Pour l'étude des symétries et des invariances le choix du repère d'étude est très capital.

Le repérage du point M le mieux adapté à l'étude du phénomène ici est le repérage cylindrique (ρ, θ, z) . La distribution étant invariante par rotation autour de l'axe Oz , le champ est indépendant de θ . De plus comme nous sommes sur l'axe de la spire $\rho = 0$.

Donc : $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z$.

Le sens est donné par la règle du tire-bouchon : $B(z)$ sera donc positif.

D'après la loi de Biot et Savart, l'élément de courant $I\vec{dl}$ centré sur P crée en M le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Or $\widehat{(\vec{dl}, \vec{r})} = \frac{\pi}{2}$ quel que soit $\vec{dl}$ et $\vec{r}$ constant. Comme $\vec{B}$ est porté par Oz , la composante utile est :

$$dB_z = dB \cos \varphi = dB \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \beta}{r^2}$$

Or $dl = R d\theta$ et $r = \frac{R}{\sin(\beta)}$

D'où :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3(\beta) d\theta$$

L'intégration sur toute la spire donne le module du champ $\vec{B}$:

$$B = \int_0^{2\pi} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3(\beta) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \vec{u}_z$$

Le champ peut aussi s'écrire en fonction de la composante z et de R sous la forme:

$$\sin \beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Soit :

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

CHAPITRE 2 : LOIS FONDAMENTALES ET DIPOLE MAGNETOSTATIQUE

I- Flux du champ magnétique à travers une surface fermée

Nous donnons ici, sans le prouver une propriété très importante du champ magnétique. Considérons une surface fermée quelconque S s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée. Nous pourrions définir un élément de surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$ dont le vecteur normal $\vec{n}$ est, par convention, orienté vers l'extérieur. Le flux du champ magnétique, à travers une surface S fermée est toujours nul.

$$\Phi_S(B) = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

On parle alors de conservation du flux magnétique c'est-à-dire que le flux du champ magnétique est nul à travers une surface fermée.

Cette propriété est reliée au fait qu'il n'existe pas dans la nature, de monopôle magnétique. En effet, en électrostatique on peut dissocier les charges + des charges -, alors qu'en magnétostatique, on ne peut pas séparer un pôle *Sud* d'un pôle *Nord*.

Remarque :

Cette loi est générale et reste valable même en **régime variable**.

II- Théorème d'Ampère

En électrostatique, le théorème de Gauss permettait, dans certains cas où le champ électrique avait une grande symétrie, de simplifier grandement le calcul du champ. En magnétostatique il existe un théorème semblable, le **théorème d'Ampère** qui nous permet de calculer rapidement le champ magnétique pour des configurations de courants présentant une grande symétrie. Nous allons introduire le théorème d'Ampère, sans le démontrer formellement, et voir quelques exemples de son application.

1- Circulation du champ magnétique

Considérons un contour fermé quelconque C le long duquel on calcule la circulation du champ magnétique $\vec{B}$. Soit $\vec{dl}$ un déplacement élémentaire le long de ce contour. Par définition, la circulation $\mathcal{C}$ de $\vec{B}$ sur le contour fermé est égale à :

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

2- Théorème d'Ampère

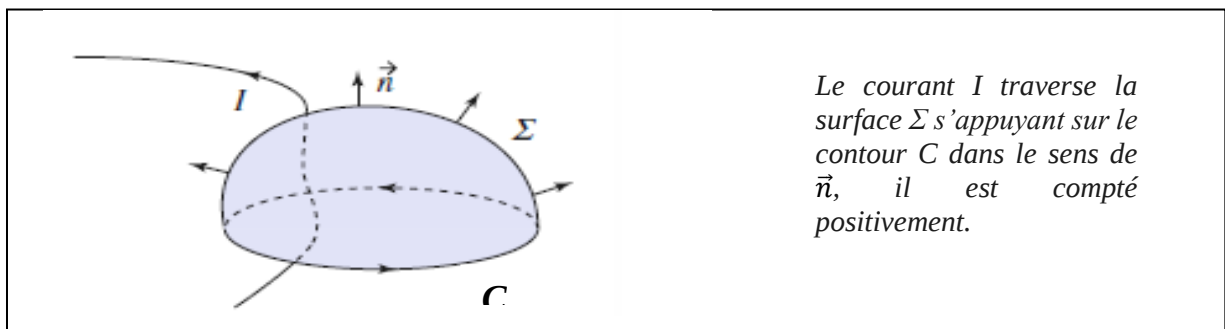
En magnétostatique, le théorème d'Ampère permet de déterminer la valeur du champ magnétique grâce à la donnée des courants électriques. Ce théorème est une forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère. Le théorème d'Ampère s'énonce de la manière suivante :

« La circulation du champ magnétique $\vec{B}$ long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée (appelée contour d'Ampère) est égale au produit de μ_0 par la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C »

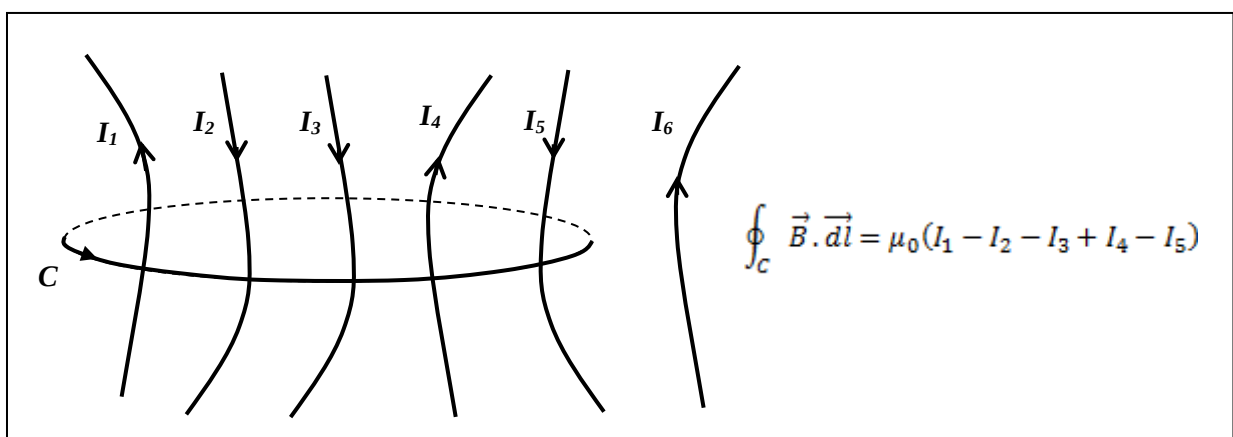
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut :

- En premier lieu, obtenir à l'aide des symétries de la distribution, la forme du champ magnétique en utilisant le plan de symétrie ou d'antisymétrie pour déterminer sa direction ; et l'invariance par rotation ou translation pour réduire la dépendance de ses composantes vis-à-vis des coordonnées.
- En second lieu : orienter le contour d'Ampère. Cette orientation définit le sens du vecteur normal $\vec{n}$ (donné par la règle du tire-bouchon ou du *bonhomme d'Ampère*) à la surface s'appuyant sur le contour d'Ampère. Les courants sont ensuite additionnés en tenant compte de leur signe. Si le courant circule dans le même sens que $\vec{n}$, il est compté positivement ; il sera compté négativement dans le cas contraire.



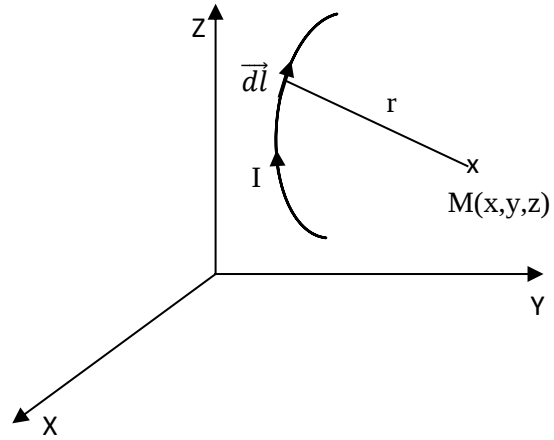
Exemple :



III- Divergence et rotationnel du champ magnétique (propriétés locales)

1- Divergence du champ $\vec{B}$

Pour calculer la divergence du champ magnétique $\vec{B}$, nous pouvons utiliser la relation de Biot et Savart. Soit un élément de circuit $d\vec{l}$ (centré sur un point P) parcouru par un courant I . Le champ $d\vec{B}$ créé en un point M est :



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{PM}$$

Pour un circuit fermé (C), le champ créé en M est :

$$\vec{B}(M) = \oint_C \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

La divergence de ce champ a pour expression :

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div} \left(\frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

On peut transformer l'expression à intégrer en utilisant les propriétés de différenciation d'un produit vectoriel :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

On a :

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} d\vec{l} - d\vec{l} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right)$$

Les opérateurs sont calculés par rapport aux coordonnées de M donc n'agissent pas sur les coordonnées du point $M \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} d\vec{l} = \vec{0}$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}}{r^3} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la relation fondamentale :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Cette relation est absolument générale et s'applique à toutes les distributions de courants.

2- Rotationnel du champ magnétique

Le théorème de Stokes nous permet d'écrire :

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

S étant une surface limitée par le contour C . Nous pouvons introduire la densité de courant $\vec{j}$ traversant la surface S .

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cette équation étant vraie quel que soit le contour et la surface, nous déduisons l'expression locale du rotationnel de $\vec{B}$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

IV- Potentiel vecteur

1- Définition du potentiel vecteur

On vient de voir que la divergence du champ magnétique $\vec{B}$ est toujours nulle ($\text{div} \vec{B} = 0$). On peut donc écrire $\vec{B}$ comme le rotationnel d'un autre champ de vecteur $\vec{A}$ puisque la divergence de tout rotationnel est nulle et que réciproquement tout champ de divergence nulle est le rotationnel d'un autre champ.

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Par définition, ce champ de vecteur $\vec{A}$ est appelé le potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$. Tout comme le champ $\vec{E}$ dérivait dans le cas statique d'un potentiel scalaire V (car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$), le champ magnétique dérive d'un potentiel qui a une forme vectorielle et non scalaire.

2- Choix de jauge du champ

Le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire quelconque ψ étant nul, $\vec{A}$ est en fait défini au gradient d'une fonction quelconque près, c'est-à-dire que si nous considérons non plus le potentiel $\vec{A}$ mais le potentiel vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \psi$, il vérifie l'équation précédente puisque le rotationnel d'un gradient est nul.

Le choix de la fonction ψ constitue le choix de Jauge du champ. On peut par exemple choisir ψ tel que $\text{div}(\vec{A}) = 0$. C'est la **jauge dite « de Coulomb »**. Dans ce cas, on montre que $\vec{A}$ est lié simplement aux sources.

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_P \frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|} d\tau$$

Remarque : En magnétostatique, il est commode de travailler dans la jauge de Coulomb c'est-à-dire de sélectionner ψ tel que $\text{div}(\vec{A}) = 0$

3- Expression de $\vec{A}$ à partir des courants

Il existe plusieurs manières de déterminer les expressions des composants du potentiel $\vec{A}$ en fonction de la distribution de courants. Nous allons les déterminer ici en utilisant la loi de Biot et Savart.

Pour une distribution des courants caractérisée par la densité de courant $\vec{j}$, le champ $\vec{B}$ d'après Biot et Savart est donné par :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

Mettons ce champ sous la forme d'un rotationnel.

On sait que :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{j} d\tau$$

Or $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{G}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{G}$.

En posant $f = \frac{1}{r}$ et $\vec{G} = \vec{j}$

On a :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{r} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \cdot d\tau$$

Or $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = \vec{0}$ car la dérivation se fait suivant les coordonnées du point M .

Le champ magnétique est donc simplement égal à :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau = \overrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{r} d\tau \right]$$

Or on a : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{r} d\tau = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}$$

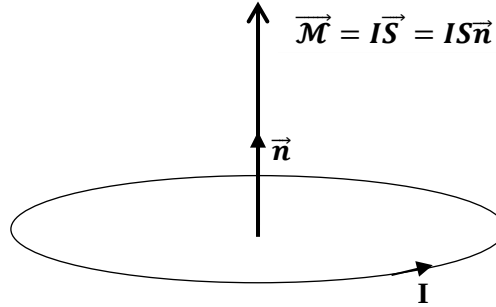
$d\vec{l}$ étant un élément infinitésimal centré en P du circuit parcouru par le courant uniforme I .

V- Dipôle magnétique

1- Moment magnétique

Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ d'une boucle parcourue par un courant I , de surface S orientée en accord avec I par un vecteur normal $\vec{n}$ est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

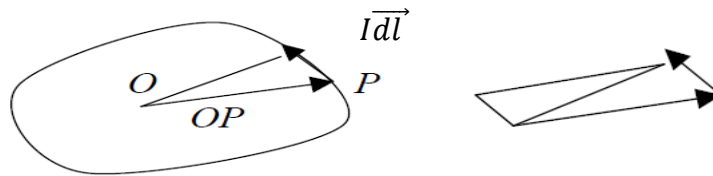


L'unité du moment magnétique dans SI est **A.m²**

- Pour une spire circulaire :

$$S = \pi R^2 \quad \text{et} \quad \vec{S} = \pi R^2 \vec{n} \quad ; \quad \vec{\mathcal{M}} = SI\vec{n} = \pi R^2 I \vec{n}$$

- Pour un circuit quelconque :



$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{l}$$

Le moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint \overrightarrow{OP} \wedge I d\vec{l}$$

- Pour une distribution volumique de courant :

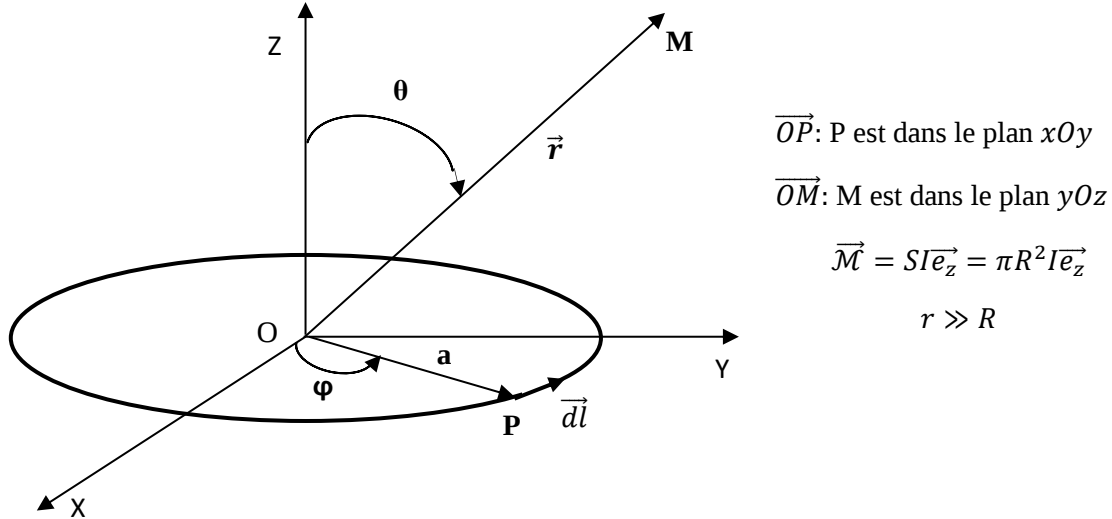
$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_V \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j} \cdot dV$$

2- Définition d'un dipôle magnétique

On appelle dipôle magnétique toute distribution de courants localisés de moment magnétique non nul et dont les dimensions sont petites vis-à-vis de la distance à laquelle on étudie le champ ainsi créé.

3- Champ magnétique créé à grande distance par un dipôle magnétique

Soit une spire plane circulaire de centre O , parcourue par un courant permanent I . Nous allons calculer le champ magnétique créé par cette spire en tout point M de l'espace, situé à une grande distance de la spire (précisément, à des distances grandes comparées à la taille de la spire).



- $I d\vec{l}$ crée en M un champ dont le potentiel vecteur vaut :

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{PM}$$

- Dans le repère $Oxyz$ on a :

$$\vec{OP}: \begin{vmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow d\vec{l} = d\vec{OP} = \begin{vmatrix} -R \sin \varphi d\varphi \\ R \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Et } \vec{OM}: \begin{vmatrix} 0 \\ r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{vmatrix} \quad \text{De plus, } \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OP}$$

$$\vec{PM}: \begin{vmatrix} -R \cos \varphi \\ r \sin \theta - R \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{PM}^2 = R^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi - 2rR \sin \theta \sin \varphi + r^2 \cos^2 \theta$$

$$\vec{PM}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \sin \varphi = r^2 \left[1 - \frac{2R}{r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{R^2}{r^2} \right]$$

En faisant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{R}{r}$, on obtient :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2R}{r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{R^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r} \left[1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}\vec{dA} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}}{PM} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \begin{vmatrix} -R \sin \varphi d\varphi \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ R \cos \varphi d\varphi \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{dA} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \begin{vmatrix} -R \sin \varphi d\varphi - \frac{R^2}{r} \sin \theta \sin^2 \varphi d\varphi \\ R \cos \varphi d\varphi + \frac{R^2}{r} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \\ \vec{A} &= \oint_{\text{sphère}} \vec{dA} = \int_0^{2\pi} \vec{dA} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \begin{vmatrix} R[\cos \varphi]_0^{2\pi} - \frac{R^2}{r} \sin \theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ R[\sin \varphi]_0^{2\pi} - \frac{R^2}{r} \sin \theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 a = \pi \\ 2 \sin b \cos b &= \sin 2b \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin b \cos b = 0\end{aligned}$$

D'où

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \begin{vmatrix} -\frac{R^2}{r} \pi \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A} = \begin{vmatrix} -\frac{\mu_0 I R^2}{4r^2} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

En tenant compte de la définition du moment magnétique de la spire:

$$\vec{\mathcal{M}} = SI\vec{e}_z = \pi R^2 I \vec{e}_z$$

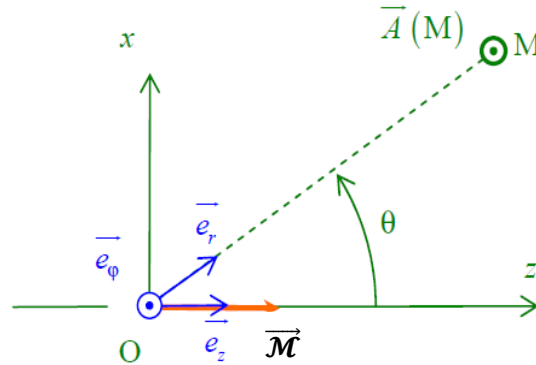
On obtient :

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^2} \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Finalement on peut écrire le potentiel vecteur créé à grande distance par une spire de moment magnétique sous la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Pour calculer le champ magnétique nous allons utiliser $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$, les dérivations porteront sur les coordonnées de M point où l'on calcule le champ. En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , d'origine le point O choisi au beau milieu du dipôle et en prenant Oz parallèle à $\vec{M}$, dont on note $\mathcal{M}$ le module.



On a :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

Le champ magnétique est donné par:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

Or le rotationnel en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\overrightarrow{rot} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{B} \begin{cases} B_r = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos \theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

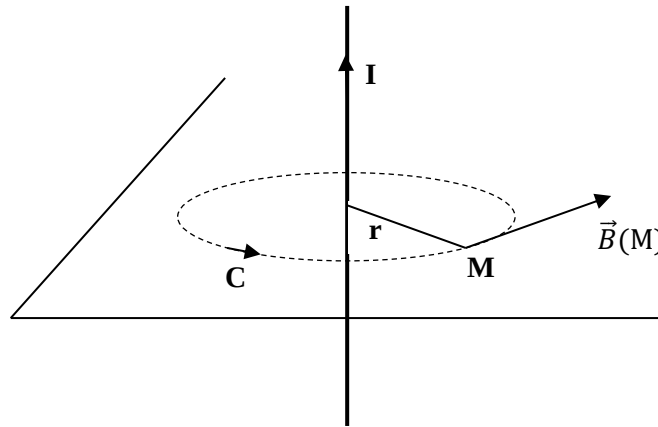
VI- Exercices

Exercice1 : Calcul du champ magnétique créé par un fil infini à partir du théorème d'Ampère

Soit un fil infini parcouru par un courant permanent d'intensité I . Déterminer le champ $\vec{B}$ en un point M situé à une distance r du fil en utilisant le théorème d'Ampère.

Réponse

Prenons comme contour C la ligne de champ qui est un cercle de rayon r centré sur le fil. Par raison de symétrie, le champ $\vec{B}$ a la même norme en tout point de ce cercle et en est tangent.



Donc d'après le théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \oint_C B(r) dl \quad \vec{B} \text{ et } d\vec{l} \text{ sont colinéaires}$$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = B(r) \oint_C dl \quad \vec{B} \text{ est constant sur } C$$

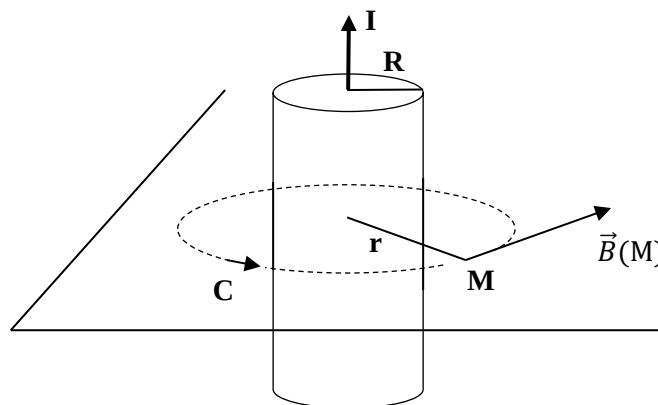
$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$\text{Soit : } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Exercice2 : Distribution volumique- théorème d'Ampère

Soit un conducteur cylindrique de section circulaire R et de longueur très grande devant R . Déterminer le champ magnétique en un point M situé à une distance r à partir du théorème d'Ampère.

Réponse



Par raison de symétrie, les lignes de champ sont des cercles admettant l'axe Ox comme axe de symétrie.

D'après les considérations de symétrie et d'invariance, le vecteur $\vec{B}(M)$ garde une norme constante le long de chacun des cercles, soit $B(r)$.

Quant au sens de ces lignes de champ, il est donné par la règle du tire-bouchon.

Détermination de $B(r)$. D'après le théorème d'Ampère, on a :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

i. Pour $r > R$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

A l'extérieur du conducteur, le champ est le même que si le conducteur était filiforme et confondu avec l'axe Ox .

ii. Pour $r < R$

Le milieu conducteur étant non magnétique, le théorème d'Ampère est encore applicable.

Si on suppose que le courant I est uniformément réparti dans la section du conducteur, le cercle de rayon r enlace le courant I' :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I'}{S'} \Rightarrow I' = I \frac{S'}{S} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

Par suite le théorème d'Ampère nous donne :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

A l'intérieur du conducteur, le champ magnétique est proportionnel à r .

CHAPITRE 3 : FORCES ET ENERGIE MAGNETIQUES

I- Force de Lorentz

1- Expression de la force de Lorentz

Une particule, de charge q , se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel où règne un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à la force électromagnétique

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force totale est appelée la **force de Lorentz**.

On peut mettre cette force sous la forme de la somme de deux forces

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

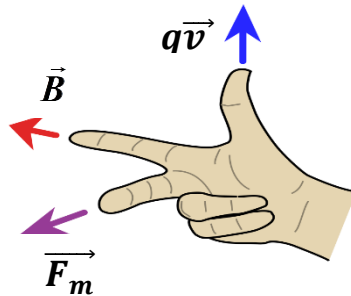
Avec :

$\vec{F}_e = q\vec{E}$: la composante électrique et

$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$: la composante magnétique

Remarques sur la force magnétique ($\vec{F}_m$)

- Si la vitesse $\vec{v}$ a la même direction que le champ magnétique, la particule ne subit pas de force.
- Dans les autres cas de figures, la force subie par la particule est perpendiculaire à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
Et son sens est déterminé par la règle de la main droite ou du bonhomme d'Ampère.



2- Travail de la force magnétique

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ le long d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

La force magnétique ($\vec{F}_m$) étant par définition, à tout instant t , perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ de la particule (propriété du produit vectoriel), elle est aussi perpendiculaire, à tout instant t , au vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}$, ce qui entraîne $\delta W = 0$ quel que soit le déplacement élémentaire.

Conclusion : La force magnétique ne travaille pas et ne peut donc pas être utilisée seule pour accélérer une particule chargée (pas de variation d'énergie cinétique).

3- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Selon la deuxième loi de Newton, le mouvement d'une particule de masse m et de charge q , dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est donné :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

soit :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Effectuons le produit scalaire de chaque membre par $\vec{v}$

$$\underbrace{q\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B})}_0 = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On a :

$$0 = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$$

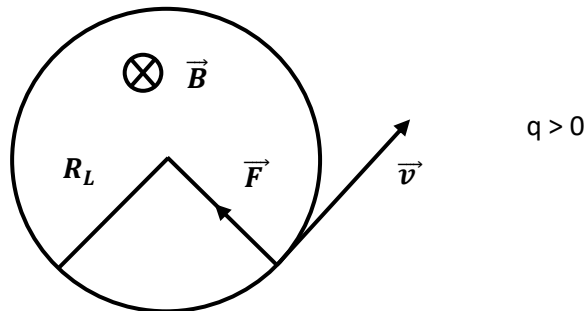
$$\frac{d(v^2)}{dt} = 0$$

⇒ Le module de la vitesse est constant.

Nous sommes donc en présence, soit d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU), soit d'un mouvement circulaire uniforme (MCU), soit d'une superposition de ces deux mouvements (hélice). Nous avons :

- Un MRU lorsque la vitesse initiale de la particule est parallèle au champ $\vec{B}$
- Un MCU lorsque la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ $\vec{B}$

Dans le cas d'un MCU; en désignant par R_L le rayon de courbure de la trajectoire, le module de l'accélération centripète vaut v^2/R_L et on a :



$$\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = |q|vB = \frac{mv^2}{R_L}$$

$$\Rightarrow R_L = \frac{mv}{|q|B}$$

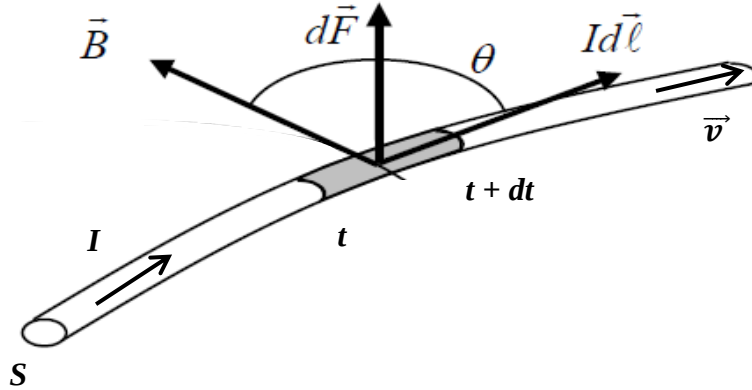
R_L est appelé le **Rayon de Larmor**

La pulsation du mouvement est : $\omega = \frac{|q|B}{m}$ est appelée la **pulsation de Larmor** ou la pulsation cyclotronique.

II- Force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant

1- Force de Laplace

Considérons un circuit filiforme parcouru par un courant continu I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Notons S la section du fil (figure ci-dessous) et $I\vec{dl}$ un élément de courant contenant dq charges se déplaçant à une vitesse uniforme $\vec{v}$.



La force magnétique élémentaire exercée sur l'élément de longueur $\vec{dl}$ du circuit est alors :

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le volume infiniment petit dV correspondant à l'élément $\vec{dl}$ est :

$$dV = \vec{S} \cdot \vec{dl}$$

La charge dq contenue dans dV est donnée par :

$$dq = ne \cdot dV = n \cdot e \cdot \vec{S} \cdot \vec{dl}$$

On a :

$$dq\vec{v} = \underbrace{n \cdot e \cdot \vec{v}}_{\vec{j}} \cdot \vec{S} \cdot \vec{dl} = \vec{j} \cdot \vec{S} \cdot \vec{dl}$$

Comme $\vec{j}$ et $\vec{S}$ sont parallèles et de même sens,

$$dq\vec{v} = I\vec{dl}$$

On obtient donc l'expression de la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

On peut également écrire l'expression de la force de Laplace, dans le cas d'un volume infiniment petit dV de particules chargées traversé par une densité de courant $\vec{j}$ sous la forme :

$$d\vec{F} = \vec{j}dV \wedge \vec{B}$$

- **Caractéristiques de la force de Laplace**

- **Direction** : $d\vec{F}$ est perpendiculaire au plan défini par $d\vec{l}$ et $\vec{B}$
- **Sens** : tel que $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F})$ forme un trièdre direct
- **Module** : $dF = |Idl \cdot B \sin \theta|$ avec $\theta = (\widehat{d\vec{l}, \vec{B}})$

Remarque : La force qui s'exerce sur un conducteur fermé parcouru par un courant permanent I vaut :

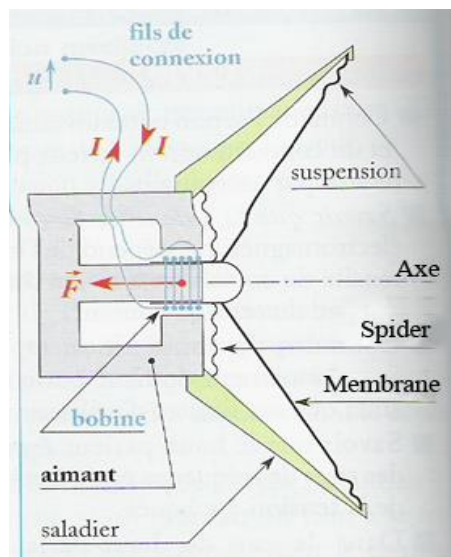
$$\vec{F} = I \oint_{\text{circuit}} d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

2- Exemple d'application de la force de Laplace : Haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur comporte :

- Un aimant cylindrique dans lequel il y a un étroit espace : l'entrefer.
- Une bobine de fil conducteur, reliée extérieurement à un circuit électrique, mobile dans l'entrefer.
- Une membrane dont la base est fixée à la bobine.

L'aimant crée un champ radial : le champ magnétique en chaque point d'une spire et dirigé vers le centre de celle-ci.



Lorsque le courant circule dans la bobine, chaque spire est soumise à des forces de Laplace qui la déplacent. Un petit élément $d\vec{l}$ d'une spire est soumis à une force de Laplace $d\vec{F}$.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Le champ étant radial, $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$. Sur chaque élément dl de la bobine, s'exerce une force orthogonale à $\vec{B}$ et $d\vec{l}$, donc perpendiculaire au plan des spires. Sa valeur est :

$$dF = Idl.B \quad \text{or} \quad \vec{F} = \sum d\vec{F}$$

$$F = \sum Idl.B = IB \sum dl = IBL \quad \text{avec} \quad L = 2\pi NR$$

L : Longueur de la bobine

N : Nombre de spires

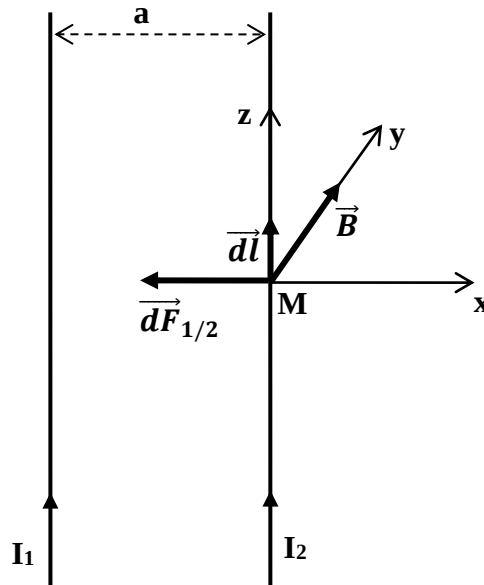
R : Rayon d'une spire

Le sens de déplacement de la bobine dépend du sens du courant. Le déplacement de la bobine entraîne un mouvement de la membrane. La membrane fait vibrer l'air, ce qui produit du son. Si le courant est alternatif, la membrane vibre à la même fréquence que le courant (son auditif compris entre 20 – 20000 Hz).

Note : le haut-parleur électrodynamique est un convertisseur d'énergie électrique en énergie mécanique. Le dispositif inverse convertissant l'énergie mécanique en énergie électrique est le microphone.

3- Force entre deux courants rectilignes et parallèles - Définition légale de l'Ampère

Considérons deux fils infinis parcourus par les courants I_1 et I_2 et situés à une distance a l'un de l'autre (figure ci-dessous). Calculons la force qu'exerce le fil 1 sur le fil 2.



Le courant I_1 crée en un point M du fil 2 un champ magnétique,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \vec{y}$$

Soit $d\vec{l}$ un élément de longueur de fil 2. On a : $d\vec{l} = dl\vec{z}$.

D'après Laplace, la force subit par cet élément de longueur est :

$$d\vec{F}_{1/2} = I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F}_{1/2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} I_2 dl (\vec{z} \wedge \vec{y})$$

$$d\vec{F}_{1/2} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} I_2 dl \vec{x}$$

Le signe (-) et la direction indique que les fils sont attirés l'un vers l'autre.

Cette force est **attractive** si les deux courants sont dans le même sens et **répulsive** dans le sens contraire.

La force par unité de longueur est donnée par :

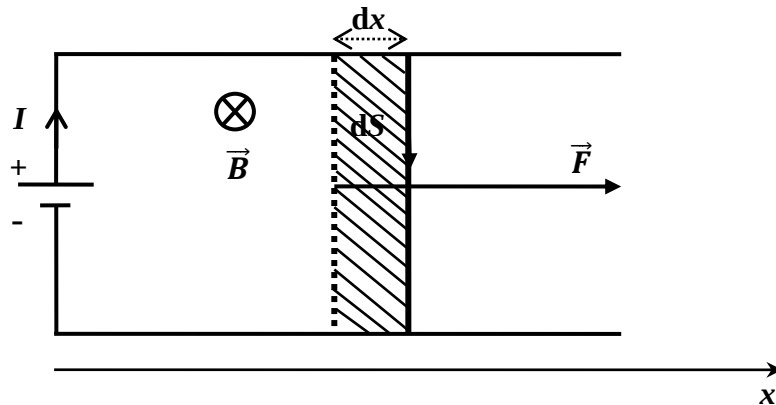
$$F = \frac{F_{1/2}}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Pour $a = 1 \text{ m}$ et $I_1 = I_2 = \text{unité d'intensité}$; on a $F = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

Par définition : 1 ampère est l'intensité de courant circulant dans deux fils rectilignes « infinis » parallèles, distants de 1 m, créant une force d'attraction de $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ sur une longueur de fil de 1 m.

III- Travail des forces électromagnétiques : théorème de Maxwell

Considérons un circuit électrique parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du circuit. Une barre conductrice de longueur l placée sur le circuit subit donc une force de Laplace $\vec{F}$ (figure ci-dessous).



La force totale subit par la barre est :

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_{\text{barre}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = IB \int_{\text{barre}} dl \vec{x} = IB l \vec{x}$$

$$\|\vec{F}\| = IB l$$

Le travail effectué par la force de Laplace lors du déplacement dx est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = IB l \vec{x} \cdot d\vec{x} = IB l dx$$

Or

$$l \cdot dx = dS \Rightarrow dW = IB dS$$

Le produit BdS représente le flux magnétique qui traverse la surface dS :

$$d\phi = B dS$$

$$\Rightarrow dW = I d\phi$$

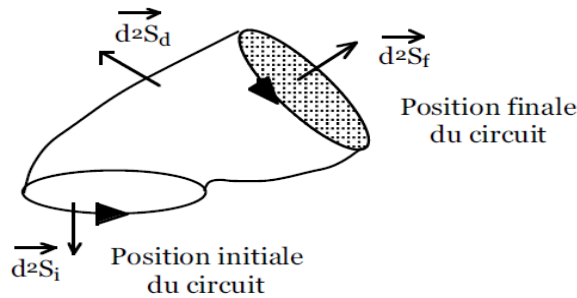
D'où

$$W = I\phi_c$$

Théorème de Maxwell : Le déplacement d'un circuit électrique indéformable fermé dans un champ magnétique extérieur engendre un travail des forces magnétiques égal au produit du courant traversant le circuit par le flux coupé par celui-ci lors de son déplacement.

Remarque :

- i. L'expression **flux coupé** provient de la représentation du champ magnétique sous forme de ligne de champ. Ainsi le circuit, lors de son déplacement va passer à travers ces lignes de champ d'où les « coupés ».
- ii. Si on considère un circuit C indéformable orienté, parcouru par un courant permanent I et déplacé dans un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur d'une position initiale (i) à une position finale (f). Lors du déplacement de sa position initiale vers sa position finale, une surface fermée $\Sigma = S_i + S_f + S_d$, où S_d est la surface balayée lors du déplacement est ainsi décrite (voir figure ci-dessous).



Le champ magnétique étant de divergence nulle, son flux à travers la surface fermée Σ est nul.

On peut écrire :

$$\phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_d} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_f} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\phi_{\Sigma} = \underbrace{\iint_{S_i} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_i}_{\phi_i} + \phi_c - \underbrace{\iint_{S_f} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 \cdot dS_f}_{\phi_f} = 0$$

Le signe $(-)$ provient de l'orientation des normales par référence au courant.

$$\Rightarrow \phi_c + \phi_i - \phi_f = 0 \Rightarrow \phi_c = \phi_f - \phi_i$$

D'où

$$\phi_c = \Delta\phi = (\phi_f - \phi_i)$$

IV- Energie potentielle d'interaction magnétique

Considérons un circuit électrique parcouru par un courant permanent I et placé dans un champ magnétique uniforme extérieur $\vec{B}$. Le circuit est donc soumis à une force de Laplace et est susceptible de se déplacer et par conséquent développer une vitesse v de déplacement. Le circuit en se déplaçant à une vitesse v possède alors une énergie cinétique E_c . D'après le théorème de l'énergie cinétique on a:

$$dE_c = dW$$

L'énergie mécanique du circuit est :

$$E_m = E_c + E_p$$

La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\begin{aligned}dE_c + dE_p &= 0 \\ \Rightarrow dE_p &= -dE_c = -dW = -Id\phi \\ E_p &= -I\phi + cste\end{aligned}$$

La **valeur de la constante**, comme pour toute énergie potentielle d'interaction, est souvent choisie arbitrairement **nulle à l'infini**.

Règle du flux maximum :

Dans un champ constant, une spire rigide parcourue par un courant constant s'oriente de façon à minimiser son énergie potentielle, ce qui est obtenue en maximisant le flux de $\vec{B}$ qui la traverse.

CHAPITRE 4 : INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

Introduction

On savait depuis la découverte d'Oersted en 1820 qu'un courant crée un champ magnétique. A la suite de cette découverte, les scientifiques se sont demandés si l'on pouvait aussi faire l'inverse c'est-à-dire obtenir un courant à partir d'un champ magnétique. Ce n'est qu'en 1830 que Joseph **Henry** et Michael **Faraday** découvrent indépendamment comment on peut obtenir un courant dans un conducteur sous l'action du champ magnétique. Ce phénomène porte le nom de l'**induction électromagnétique**. Le terme induction électromagnétique désigne alors la production de courants et donc de force électromotrices (*f. é. m.*) à partir de champ magnétiques variables. On parle alors de **courants induits** et de *f. é. m. induites*.

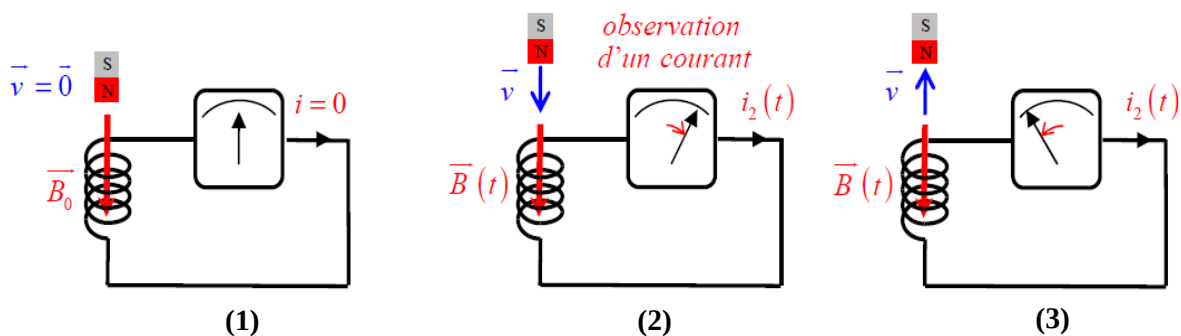
L'induction électromagnétique est à l'origine du fonctionnement des générateurs à courants continus et à courants alternatifs, des transformateurs, des capteurs magnétiques de type fluxmètre, les micros magnétiques, les lampes à induction, etc.

Remarque : Il ne faut pas confondre l'induction électromagnétique et l'induction magnétique ($\vec{B}$)

I- Etude expérimentale des phénomènes d'induction

1- Champ magnétique variable dans une bobine fixe

Introduisons un aimant dans une bobine fixe connectée à un galvanomètre (un galvanomètre est un ampèremètre sensible, qui permet de mesurer de faibles intensités).

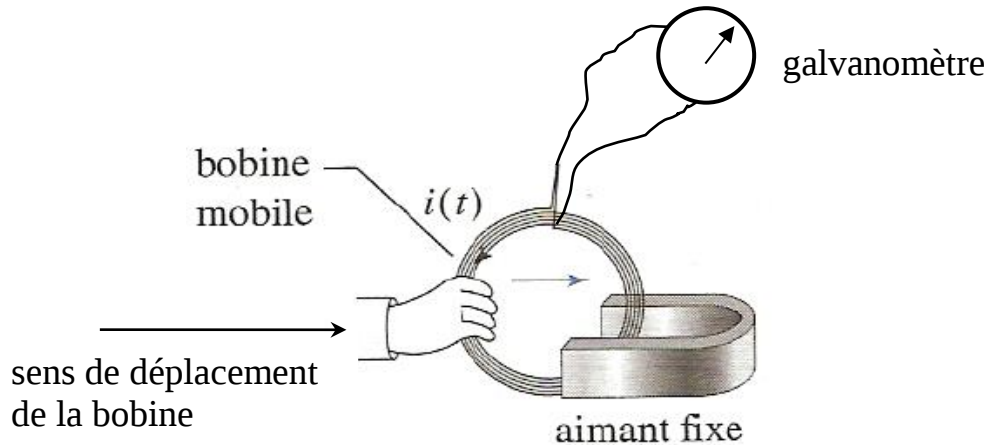


On constate :

- Si l'aimant est immobile (champ magnétique fixe) rien ne se passe et l'aiguille est sur le zéro central ; aucun courant n'est donc observé dans le circuit (figure (1)). Le courant induit est nul ;
- En rapprochant l'aimant de la bobine fixe, l'aiguille dévie vers la droite ; il se produit dans le circuit un courant induit (figure (2)) ;
- En éloignant l'aimant de la bobine, l'aiguille dévie vers la gauche ; le courant circule dans le sens opposé (figure (3)).

2- Déplacement d'un circuit dans un champ magnétique fixe

Déplaçons une bobine près des pôles d'un aimant U fixe. On constate l'apparition d'un courant dans la bobine et par conséquent une $f.e.m.$. La force électromotrice est positive lorsque la bobine s'approche de l'aimant et négative lorsque la bobine s'éloigne. On observe aussi que l'amplitude de la $f.e.m.$ augmente avec la vitesse de déplacement de la bobine.



Conclusion

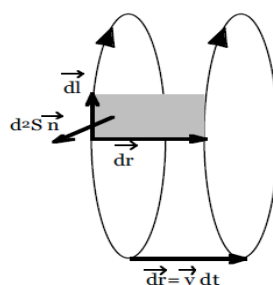
Le dispositif composé d'un aimant en mouvement devant une bobine se comporte comme un générateur électrocinétique capable de produire un courant induit. On parle de l'**induction de Neumann**.

De même un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent se comporte comme un générateur électrocinétique capable de produire un courant induit. On parle de l'**induction de Lorentz**.

II- Explication des phénomènes d'induction : Loi de Faraday et loi de Lenz

1- Loi de Faraday

Considérons un circuit fermé qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ « extérieur » indépendant du temps. Orientons arbitrairement ce circuit dans un sens positif (voir figure ci-dessous). $d^2S\vec{n}$ est la surface orientée élémentaire, décrite lors des déplacements élémentaires $d\vec{r} = \vec{v}dt$ du circuit et $d\vec{l}$ du courant.



La force de Lorentz agissant sur chaque particule q du circuit s'écrit :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Si nous posons $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ appelé **champ électromoteur**, nous avons :

$$\vec{f} = q\vec{E}_m$$

Cette force fournit une force électromotrice e qui est défini par :

$$e = \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{f}}{q} \cdot d\vec{l}$$

Où $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire de q . On a :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{f}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\text{circuit}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} (\vec{v} dt \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} (d\vec{r} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} (d\vec{l} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} (d\vec{r} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} d^2 S \vec{n} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

On a :

$$e = -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} d^2 \phi_c$$

$d\phi_c$ est la variation du flux coupé d'après le théorème de Maxwell. Ce flux est égal au flux total coupé par le circuit.

$$\Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Nous venons de démontrer la loi de Faraday dans le cas d'un circuit rigide déplacé dans un champ électromagnétique statique. Cette loi reste valable aussi bien pour des circuits rigides ou déformés se déplaçant dans un champ magnétique statique.

Enoncé de la loi de Faraday :

La force électromotrice ($f.é.m.$) induite dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique « à travers le circuit »

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (a)$$

La *f.é.m.* est mesurée en **Volts**, et le flux magnétique ϕ en **Weber** (Wb)

2- Loi de Lenz

La loi de Lenz est une loi qualitative qui donne une interprétation au signe (–) dans l'équation (a).

Enoncé de la loi de Lenz :

Le courant induit, par ses effets, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

Remarque 1 : L'équation (a) est généralement appelée la **loi de Lenz-Faraday**

Remarque 2 : La détermination du sens du courant induit se fait de la façon suivante :

- 1) On se choisit arbitrairement un sens de la circulation le long du circuit
- 2) Ce sens définit, grâce à la règle du bonhomme d'Ampère, une normale au circuit
- 3) Le signe du flux est alors déterminé en faisant le produit scalaire du champ magnétique par cette normale
- 4) En utilisant la loi de Faraday, on obtient la valeur et le signe de la *f.é.m.*
- 5) Le courant est obtenu à partir de la loi d'Ohm

III- Auto-induction et induction mutuelle

1- Auto-induction ou induction propre

On parle d'auto-induction lorsque la source du champ magnétique à l'origine d'une force électromotrice dans un circuit est le courant électrique parcourant ce même circuit.

Le phénomène d'auto-induction apparaît dès que le flux magnétique varie au cours du temps, donc quand le courant qui circule dans le circuit est variable au cours du temps. Il se manifeste par l'apparition d'une *f.é.m.* et d'un courant auto-induit. En fonction du flux magnétique, on peut calculer la *f.é.m.* auto-induite.

Soit un circuit fermé parcouru par un courant variable i . Ce circuit engendre un champ $\vec{B}$ (loi de Biot et Savart) dans tout l'espace et par conséquent il existe un flux propre de $\vec{B}$ à travers le circuit lui-même.

$$\phi_P = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \left[\underbrace{\iint_S \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} d\vec{S}}_L \right] i = Li > 0$$

d'où :

$$L = \frac{\phi_{propre}}{i}$$

L s'appelle le **coefficient d'auto-induction** (ou inductance propre ou *self-induction*) du circuit et s'exprime en **Henry** (L en Henry (H) et ϕ_P en Weber (Wb)) ; i est en Ampère

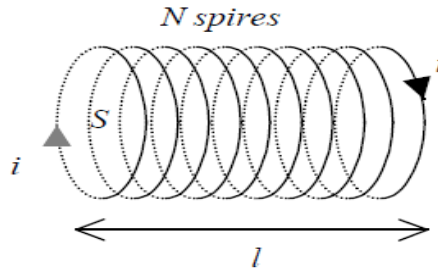
Remarque :

- 1) L'inductance propre L est une grandeur *toujours positive*

2) L'inductance propre L ne dépend que de la géométrie du circuit et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel il est plongé

Exemple

Considérons un solénoïde de longueur l comportant N spires régulières, supposées jointives, de section S parcouru par un courant i .



Le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde (champ propre) est :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{e}_z$$

avec $\vec{e}_z$ le vecteur de l'axe du solénoïde.

Le flux propre est alors :

$$\phi_P = N\phi_0 = N(BS) = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} i$$

L'inductance propre du solénoïde est alors :

$$L = \frac{\phi_P}{i} = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$$

2- Force électromotrice d'auto-induction

On se limitera au cas d'un circuit rigide. Dans ce cas particulier l'inductance L est constante.

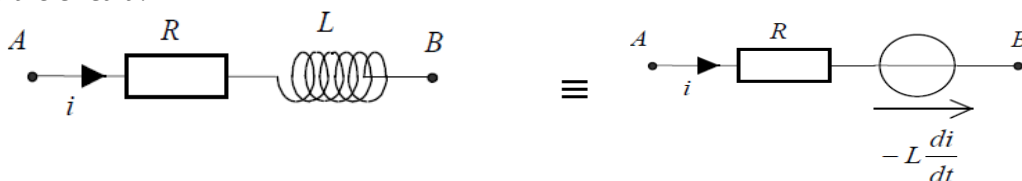
Si i varie ; le flux ϕ varie et la $f.é.m.$ d'auto-induction est donnée par :

$$e = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

La $f.é.m.$ auto-induite s'oppose toujours à la variation du flux magnétique et donc à la variation du champ magnétique qui lui a donné naissance ; elle crée un courant induit qui s'oppose au courant inducteur.

3- Loi d'Ohm aux bornes d'une portion de circuit présentant une inductance propre

Soit le circuit :



La loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$u_{AB} = Ri - e_p - e_{ext}$$

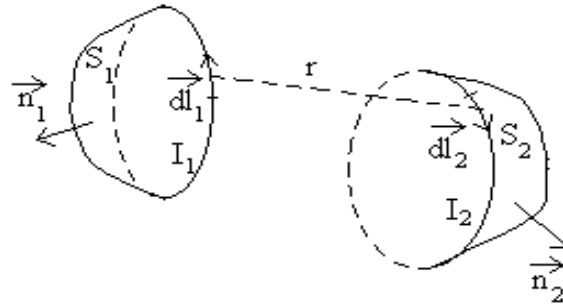
$$u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt} - e_{ext}$$

Dans le cas où il n'y a pas de phénomène d'induction "externe" (le champ magnétique externe est nulle $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$) on obtient:

$$u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

4- Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Considérons deux circuits électriques, C_1 et C_2 , dont les positions sont fixes l'une par rapport à l'autre (voir figure). Si nous faisons passer un courant variable i_1 dans le circuit C_1 , ce courant va créer dans tout l'espace un champ magnétique variable $\vec{B}_1$. Le flux de ce champ magnétique à travers toute surface orientée s'appuyant sur le circuit C_2 sera également variable. En vertu de la loi de Faraday, il y aura donc création d'une force électromotrice et d'un courant induit dans le circuit C_2 . La réciproque reste vraie pour C_2 parcouru par un courant variable i_2 .



Le flux du champ $\vec{B}_1$ créé par C_1 à travers la surface de C_2 est :

$$\phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \left[\underbrace{\iint_{S_2} \oint_{C_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} d\vec{S}_2}_{M_{12}} \right] i_1 = M_{12} i_1$$

De même le flux du champ $\vec{B}_2$ créé par C_2 à travers la surface de C_1 est :

$$\phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \left[\underbrace{\iint_{S_1} \oint_{C_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} d\vec{S}_1}_{M_{21}} \right] i_2 = M_{21} i_2$$

Les termes M_{12} et M_{21} sont appelés **coefficients d'induction mutuelles** ou **induction mutuelles**, leur unité est le Henry (H). Ils dépendent de la distance entre les deux circuits et de la géométrie liés à la forme de chaque circuit.

On montre que $M_{21} = M_{12} = M$, coefficient d'induction mutuelle ou inductance mutuelle. M est positif (négatif) si les circuits C_1 et C_2 sont parcourus par des courants de même sens (de sens opposé).

Le flux total à travers C_1 et C_2 s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

On aura en régime variable dans chaque circuit :

$$\begin{cases} e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Relations qui peuvent être généralisées dans le cas de plusieurs circuits en interaction par :

$$\begin{aligned} \phi_k &= \phi_{kk} + \sum_{i=1}^n \phi_{ik} = L_k i_k + \sum_{i,k \neq i}^n M_{ik} i_i \\ e_k &= -L_k \frac{di_k}{dt} - \sum_{i,k \neq i}^n M_{ik} \frac{di_i}{dt} \end{aligned}$$

IV- Energie électromagnétique des circuits

Pour un circuit C parcouru par un courant permanent I et de flux propre ϕ , l'énergie électromagnétique est définie comme étant le travail qu'il faut fournir au circuit pour faire passer le courant et le flux de zéro aux valeurs finales I et ϕ .

1- Cas d'un circuit filiforme

Lorsqu'un élément de circuit d'inductance L est parcouru par un courant variable i , il reçoit une puissance :

$$P_m = -ei = Li \frac{di}{dt}$$

Pour calculer le travail requis pour faire croître le courant dans ce circuit de 0 à I , on calcule le travail infinitésimal effectué pendant un temps dt , pour faire passer le courant de i à $i + di$:

$$dW_m = P_m \cdot dt = L i di$$

Pour trouver le travail total, on intègre l'expression ci-dessus de zéro à la valeur finale du courant :

$$W_m = \int dW_m = \int_0^I L i di = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Ainsi l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit est :

$$E_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Comme $\phi = LI$, l'expression de E_m devient:

$$E_m = \frac{1}{2} I \phi$$

2- Cas de deux circuits filiformes

Soient C_1 et C_2 deux circuits filiformes d'inductance propre L_1 et L_2 , parcourus par des courants I_1 et I_2 .

L'énergie emmagasinée par les deux circuits est :

$$\begin{aligned} E_m &= - \int_0^t e_1 I_1 dt - \int_0^t e_2 I_2 dt \\ &= \int_0^t \left(L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + M I_1 \frac{dI_2}{dt} \right) dt + \int_0^t \left(L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 \right) dt + \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right) dt + \int_0^t M \frac{d}{dt} (I_1 I_2) dt \\ E_m &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \end{aligned}$$

L'énergie magnétique d'un système de deux circuits couplés est, en l'absence d'autres sources de champ magnétique :

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

On voit donc que $E_m \neq E_{m1} + E_{m2}$; il y a un troisième terme, correspondant à l'interaction entre les deux circuits.

Toutefois, comme le flux traversant C_1 s'écrit : $\phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$

Et celui traversant C_2 est : $\phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$

On obtient :

$$E_m = \frac{1}{2} (I_1 \phi_1 + I_2 \phi_2)$$

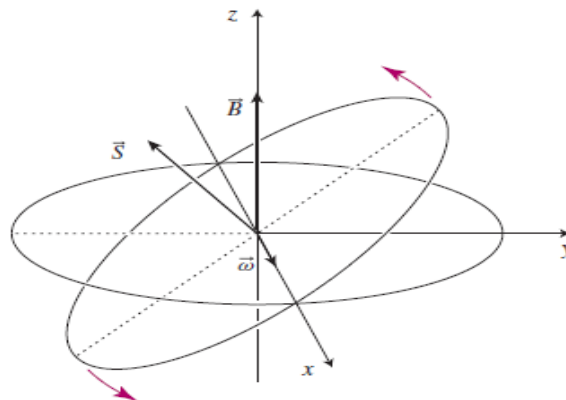
V- Exemple d'applications des phénomènes d'induction

Les phénomènes d'induction sont très largement utilisés pour convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique, et vice-versa. Nous ne donnerons ici qu'une série d'exemples de ce type d'utilisation.

1- Générateur de courant alternatif ou alternateur

De façon schématique, un générateur de courant alternatif peut être représenté par une spire circulaire mobile autour d'un de ses diamètres, l'ensemble étant soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ constant (figure ci-dessous). L'axe de rotation sera défini comme l'axe Ox, le champ magnétique étant orienté suivant Oz ($\vec{B} = B\vec{u}_z$). Lorsque la spire tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω , le flux magnétique qui la traverse varie. Cette variation de flux du champ magnétique va induire un courant dans la spire dont l'intensité va varier au cours du temps à la fréquence ω . Plus quantitativement, le vecteur surface $\vec{S}$ dont le module est égal à la surface S de la spire et dont la direction normale au plan contenant la spire est orientée selon la règle du « bonhomme d'Ampère » peut s'écrire :

$$\vec{S} = S\vec{u}_z \cos(\omega t) + S\vec{u}_y \sin(\omega t)$$



Le flux du champ magnétique vaut donc :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\omega t)$$

Le force électromotrice e est donnée par:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t)$$

Un courant I va circuler alors dans la spire, son intensité étant définie par la relation :

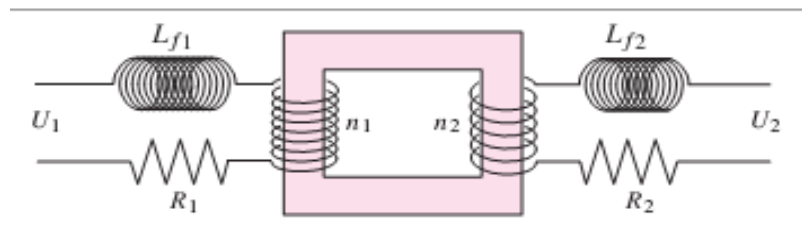
$$I = \frac{e}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin(\omega t)$$

Remarquons que ces variations du courant I , en quadrature avec celles de ϕ , correspondent bien à celles données par la « loi de Lenz ». Tant que ϕ diminue, le courant induit crée un champ magnétique induit de même sens que $\vec{S}$, créant ainsi un flux induit qui s'ajoute au flux inducteur. Dès que ϕ augmente, le

flux induit est de sens opposé à $\vec{S}$, créant alors un flux induit négatif qui se retranche du flux inducteur. Dans chaque cas, le flux induit tend à s'opposer à la variation de flux qui lui a donné naissance.

2- Les transformateurs

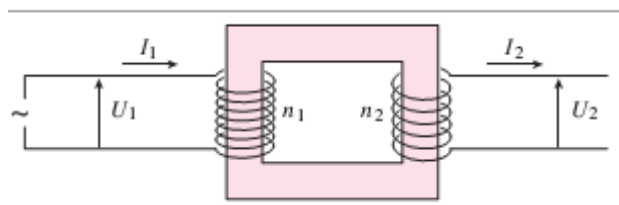
Un transformateur permet de réduire ou d'augmenter une tension électrique appliquée à un circuit. Il comprend au moins deux enroulements situés sur le même circuit magnétique, couplés aussi complètement que possible l'un à l'autre. Un transformateur idéal est caractérisé par des enroulements sans résistance, par un circuit sans fuite et un noyau magnétique sans hystérésis avec un μ_r infini, donc une réluctance (résistance magnétique qui est égale au quotient de la force magnétomotrice par le flux d'induction associé) nulle. On peut donc schématiser un transformateur comme la somme d'un transformateur idéal et d'éléments complémentaires qui seront des résistances et des auto-inductances de fuite partielle.



Si une différence de potentiel sinusoïdale $U_1 = V_{1M}e^{j\omega t}$ est appliquée aux bornes du primaire indicé par 1, celui-ci est traversé par un courant alternatif qui crée dans le circuit un flux variable ϕ . Celui-ci engendre dans le secondaire une *f.é.m.* induite de même fréquence que la source et utilisable pour alimenter un récepteur d'impédance complexe Z_2 . On dit que le transformateur est une machine à flux forcé.

a. Transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, on supposera nulles la réluctance du circuit magnétique, les résistances des enroulements R_1 et R_2 et les auto-inductances de fuite L_{f1} et L_{f2} . Le flux ϕ créé par le circuit primaire se retrouve donc intégralement « transmis » au circuit secondaire.



Ce flux ϕ crée dans le primaire une force électromotrice e_1 égale à $-n_1 \frac{d\phi}{dt}$.

Puisque la résistance des enroulements est nulle, nous obtenons simplement la relation entre la tension appliquée U_1 et le flux ϕ :

$$U_1 = -e_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt}$$

Le flux ϕ étant conservé puisque, par hypothèses il n'y a pas de fuites magnétiques, on obtient aux bornes du circuit secondaire une relation équivalente :

$$U_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Le rapport des tensions U_1/U_2 est donc égal au rapport des nombres de spires dans les enroulements

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m} \quad \text{avec} \quad m = \frac{n_2}{n_1} = \textbf{rapport de transformation}$$

La puissance électrique fournie se conserve :

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e(U_1 I_1^*) = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e(U_2 I_2^*)$$

Ce dernier résultat souligne l'intérêt d'utiliser un transformateur de cette nature pour réduire une tension. En effet, l'utilisation d'une résistance électrique aurait pu également provoquer une chute de tension mais les pertes par effets joule auraient entraîné une perte de puissance.

b. Transformateur réel

Le fonctionnement d'un transformateur réel doit prendre en compte l'existence de résistances dans les enroulements, de pertes magnétiques qui font que seule une partie du flux créé au primaire traverse le secondaire, et du fait que le matériau ferromagnétique décrit une courbe d'hystérésis à chaque cycle de la tension alternative. L'importance technologique, industrielle et économique de ces facteurs est considérable, mais les développements auxquels ils donnent lieu sortent du cadre de cet ouvrage. On se contentera d'une description qualitative de ce fonctionnement.

Dans un transformateur réel, on doit tenir compte des résistances R_1 et R_2 et des auto-inductances de fuite L_{f_1} et L_{f_2} . Les tensions qu'on mesure, U_1 et U_2 s'écrivent alors :

$$U_1 = R_1 I_1 + jL_{f_1} \omega I_1 - U_1'$$

$$U_2 = R_2 I_2 + jL_{f_2} \omega I_2 - U_2'$$

Les relevés des indications des appareils de mesure pour différentes valeurs de la charge montrent une faible chute de tension en charge ($U_{2réelle} < U_{2idéale}$). Souvent, cette chute de tension est suffisamment limitée pour que la valeur de la tension secondaire U_2 puisse être assimilée à mU_1 .

D'où :

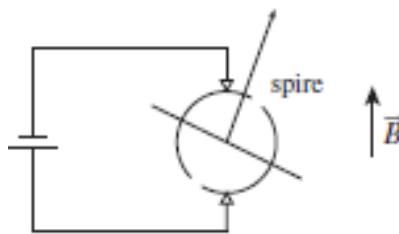
$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{m}$$

3- Les moteurs électriques

Tous les moteurs électriques fonctionnent sur le même principe de base : la partie mobile (rotor) porte un moment magnétique et la partie fixe (stator) engendre un champ magnétique qui n'est jamais aligné avec le moment du rotor. Il en résulte un couple qui fait tourner le rotor et délivre un travail. Toute la variété des moteurs repose sur les différentes méthodes développées pour maintenir un angle entre champ et moment, malgré la rotation du moment.

a. Un moteur élémentaire

Il faut calculer le couple qui s'exerce sur une spire de moment magnétique $\vec{M}$ parcourue par un courant et située dans un champ magnétique homogène $\vec{B}$ en introduisant de façon élémentaire le principe de la « commutation » qui permet de retourner le moment du rotor chaque fois qu'il va être aligné avec le champ du stator.



Le courant qui alimente la spire vue sur la figure ci-dessus en perspective provient du générateur par l'intermédiaire des deux demi-cylindres sur lesquels s'appuient deux « balais ». A chaque demi-tour, le sens du courant s'inverse dans la spire, ce qui retourne son moment magnétique. Le couple moteur qui en résulte garde ainsi constamment le même signe et le moteur tourne.

Ce genre de moteur est extrêmement utilisé dans toutes les applications fonctionnant en courant continu, comme par exemple les modèles réduits ou les lecteurs de cassettes portables. Dans ces moteurs, la spire unique alimentée par un collecteur à deux électrodes est remplacée par un ensemble de bobinages enroulés autour d'un noyau ferromagnétique, décalés angulairement et alimentés par un collecteur ayant un grand nombre de lames.

En général, le champ magnétique fixe est produit par un aimant permanent. On peut aussi le produire par un bobinage parcouru par un courant. Si on connecte en série ce bobinage inducteur et la bobine tournante, on constitue un « moteur universel », fonctionnant aussi bien en courant continu qu'en courant alternatif : en effet, à chaque demi-alternance, le sens du courant s'inverse, donc également le sens du champ inducteur et celui du moment du rotor : champ et moment retrouvent leurs positions respectives et le couple ne change pas.

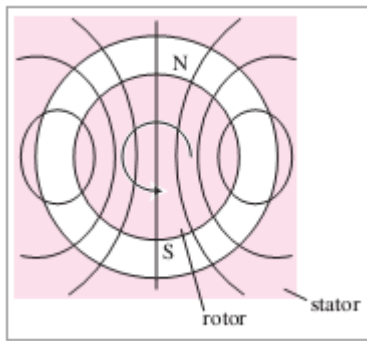
b. Moteurs à champ tournant

Le moteur à courant continu est caractérisé par un rotor alimenté en courant par l'intermédiaire d'un collecteur assurant la commutation, le rôle du stator consistant à fournir un champ magnétique fixe. Il

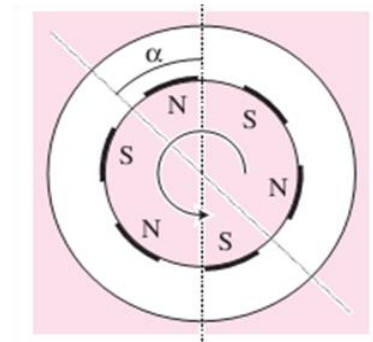
existe d'autres types de moteurs dans lesquels le stator délivre un champ magnétique, dit « champ tournant », dont l'orientation varie au cours du temps.

Le champ tournant

Considérons un système comprenant un stator ferromagnétique et un rotor également ferromagnétique porteur d'un moment magnétique $\vec{M}$ (figure (a)). Nous supposons que le champ magnétique $\vec{B}_0$ créé par ce moment est, dans tout le volume du rotor, parallèle à $\vec{M}$. Nous supposons en outre que l'espace entre stator et rotor est partout faible, de sorte que dans cet entrefer, le champ est radial.



(a)



(b)

A un instant donné, l'angle de $\vec{M}$ par rapport à une direction origine vaut ωt . Compte tenu de la conservation de la composante normale du champ dans l'entrefer, le champ dans l'entrefer au niveau de l'origine s'écrit :

$$B_0(0) = B_0 \cos \omega t$$

Pour un point repéré par l'angle α :

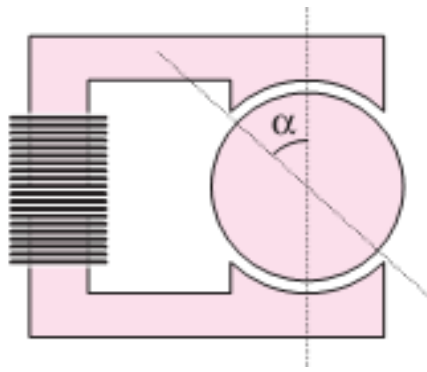
$$B(\alpha) = B_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

On peut imaginer que le rotor comporte non plus deux pôles mais p (figure (b)) paires de pôles. On voit que lors d'une rotation de vitesse angulaire ω , un point M de l'entrefer voit défiler les pôles à la pulsation $p\omega$ et le déphasage d'un point situé angulairement à α de M est égal à $p\alpha$. Le champ tournant au point α s'écrit alors :

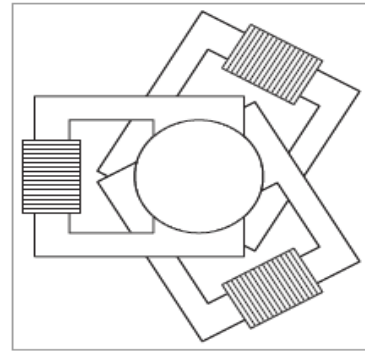
$$B(\alpha) = B_0 \cos p(\omega t - \alpha)$$

Réalisation de champ tournant

Dans le paragraphe précédent, on a introduit la notion de champ tournant en utilisant le champ créé par un aimant qui tourne. On appellera en général champ tournant, tout champ magnétique décrit en chaque point de l'entrefer par la relation précédente ($B(\alpha) = B_0 \cos p(\omega t - \alpha)$), quel que soit le dispositif utilisé pour l'engendrer. On va examiner quelques-uns des champs tournants les plus employés techniquement.



(a)



(b)

Commençons par le champ dipolaire qui pourra, par exemple, être créé dans l'entrefer d'un électro-aimant alimenté en courant alternatif (figure (a)) :

$$B(\alpha) = B_0 \cos \omega t \cos \alpha$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{2} B_0 (\cos(\omega t + \alpha) + \cos(-\omega t + \alpha))$$

On a la superposition de deux champs tournant en sens inverse à la pulsation ω .

On peut aussi créer un champ dit «multipolaire». Il est engendré par trois circuits magnétiques identiques à celui du paragraphe précédent, décalés angulairement de 120° et alimentés sur les trois phases d'une distribution triphasée (figure (b)) :

$$B_1 = B_0 \cos \omega t \cos \alpha$$

$$B_2 = B_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$B_3 = B_0 \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Grâce au courant triphasé, on peut donc réaliser facilement des champs tournants. C'est une des principales raisons de son emploi.

Moteurs à champs tournants

On a vu que le principe général des moteurs consistait à maintenir un décalage angulaire entre le champ magnétique du stator et le moment magnétique du rotor. L'utilisation des champs tournants permet d'obtenir ce résultat, suivant deux principes, celui des moteurs synchrones, peu pratiques, et celui des moteurs asynchrones, qui représentent la majorité des moteurs industriels.

Moteurs synchrones et alternateurs

Un stator crée un champ tournant à la vitesse $\vec{V}$. Le rotor est un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$, par exemple un aimant permanent. Dans le fonctionnement en alternateur, le champ tournant est engendré par la circulation des courants induits dans le stator par la rotation du moment magnétique du rotor. Ces

courants ne circulent que si le générateur est relié à un circuit d'utilisation, mais si l'intensité demandée par l'utilisateur devient trop importante, le phénomène de décrochement se produit comme pour le moteur. Dans un réseau synchronisé comme le réseau E.D.F en France, cette situation serait catastrophique et doit donc être évitée à tout prix.

Moteurs asynchrones

Dans ces moteurs, le stator fabrique un champ $\vec{B}_0$ tournant à la vitesse $\vec{V}$.

CHAPITRE 5 : REGIMES VARIABLES

Les régimes variables constituent les régimes pour lesquels les grandeurs électromagnétiques évoluent dans le temps. Ils englobent les phénomènes d'induction, de capacité et de propagation. Ce chapitre aborde quelques notions sur les régimes variables et l'étude des circuits linéaires passifs en régime variable. L'étude des équations de Maxwell en régime variable sera abordée en année supérieure.

I- Notions importantes à savoir sur le régime variable

Nous avons vu qu'en régime statique les champs électrostatique et magnétostatique sont indépendants. En régime variable ce n'est plus le cas, il y a couplage électromagnétique entre champ électrique $\vec{E}$ et induction magnétique $\vec{B}$ d'une part et entre champ magnétique $\vec{H}$ et induction électrique $\vec{D}$ d'autre part. Le premier couplage est à l'origine du phénomène d'induction électromagnétique.

On sait, en effet, que la variation du flux magnétique au voisinage d'un conducteur crée des effets électriques comme la création d'une tension induite électrique aux bornes de ce conducteur et comme la création de courants électriques induits dans un circuit électrique fermé.

Le second couplage conduit à la généralisation du théorème d'Ampère aux régimes variables. Il est important dans l'étude des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques. Une variation temporelle de l'induction électrique engendre localement une densité de courant qui crée un champ magnétique.

De plus en régime variable :

- Les lois de flux ne sont pas modifiées.
- Les lois concernant les circulations des champs d'excitation sont modifiées.

II- Phénomènes d'induction, de capacité et de propagation

1- Le phénomène d'induction

Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune *f.é.m* ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la *f.é.m* ou le courant qui apparait est dû au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

2- Le phénomène de capacité

Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du

circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, l'on sera amené à introduire le courant de déplacement.

3- Le phénomène de propagation

Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources.

L'on exprime ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

III- Approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S)

1- Régime transitoire

En physique, un **régime transitoire** est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable ou le *régime établi*. Un régime transitoire peut apparaître lors d'une modification d'un système. Il peut être caractérisé par un *taux d'amortissement*, un *temps de relaxation* ou encore un *facteur de qualité*.

Pour un circuit électrique un régime transitoire apparaît par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur, à la modification de la tension ou de l'intensité délivrée par un générateur, au passage d'un signal continu à un signal périodique. Il prend la forme d'un *régime apériodique*, d'un *régime (apériodique) critique*, ou d'un *régime pseudo-périodique*.

2- Régime permanent

En physique, un **régime permanent** est le régime d'un système stable observable après un certain temps, lorsque le *régime transitoire* est éteint.

Un exemple typique de régime permanent est le *régime sinusoïdal* forcé d'un *circuit RLC* excité par un générateur de tension sinusoïdale. Après extinction du régime transitoire, et en l'absence de non-linéarités, la fréquence d'oscillation du circuit est égale à celle du générateur.

Dans certaines situations, si les conditions extérieures et les contraintes appliquées au système étudié sont indépendantes du temps alors le régime permanent peut être également indépendant du temps et être alors qualifié de stationnaire, sans que cela ne constitue un cas général.

3- Régime stationnaire

Un régime stationnaire est caractérisé par des grandeurs indépendantes du temps. Un circuit en courant continu est donc en régime stationnaire.

4- Régimes quasi-stationnaires

Les *régimes lentement variables*, appelés aussi *régimes quasi-stationnaires* ou *quasi-permanents*, caractérisent les situations où la propagation de l'onde électromagnétique peut être considérée comme infinie. On néglige donc la durée de propagation d'une modification d'un bout à l'autre du dispositif.

Par exemple dans un régime quasi-stationnaire, l'intensité du courant est la même en tout point d'une branche de circuit.

5- Approximation des régimes quasi stationnaires

En électromagnétisme, l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (ARQS, on parle aussi d'**ARQP** pour « permanents » au lieu de « stationnaires ») consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation des ondes électromagnétiques devant la période du signal.

Remarque :

- La loi des nœuds est valide dans le cadre de l'ARQS
- Les lois de la magnétostatique se généralisent aux cas des régimes quasi-stationnaires.
- Le théorème d'Ampère et la loi de Biot et Savart sont encore valides.

IV- Etude des circuits linéaires passifs en régime variable

Nous allons étudier ici des dipôles linéaires passifs R-L ; R-L-C en régime variable (en restant dans le cadre de l'ARQS, ce qui exclut les phénomènes de propagation).

1- Rappels

Considérons les figures 1, 2 et 3 ci-dessous où les éléments R , L et C sont supposés parfaits.

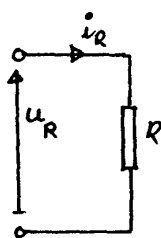


Figure 1

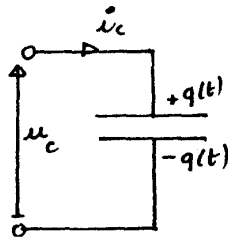


Figure 2

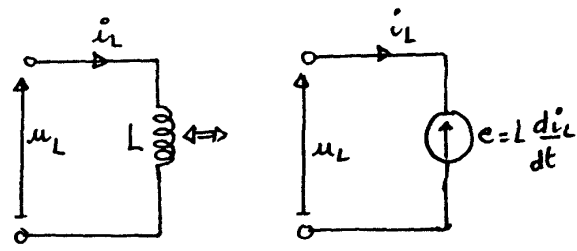


Figure 3

Pour les conventions d'orientation,

$$u_R = R \cdot i_R \quad ; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad ; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

La résistance suit la loi d'Ohm. La figure 2 correspond à la charge du condensateur. Dans le cas d'une décharge, q décroît, $i = -\frac{dq}{dt}$, le courant change de sens pour une polarisation donnée du condensateur.

Dans une inductance, naît une *f.é.m.* induite donnée par la loi de Faraday : $e = -L \frac{di}{dt}$, en opposition sur le courant (loi de Lenz).

2- Généralités

Considérons un réseau linéaire constitué d'éléments R , L et C et soumis à une source de tension ou de courant variable. Le réseau étant linéaire, l'évolution de toute grandeur électrique (intensité, tension, charge d'un condensateur. . .) notée $y(t)$, est décrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

où l'ordre n de l'équation différentielle définit l'**ordre du circuit**.

- Le second membre de l'équation est lié à la présence du générateur. On parle du terme d'excitation.
- Le terme de gauche est caractéristique du dipôle et les constantes a_k ne dépendent que des éléments constituant le dipôle.
- On établit en mathématiques que la solution de l'équation différentielle est la somme de deux grandeurs :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$y_1(t)$ désigne la solution de l'équation homogène (sans second membre) et représente le **régime libre** c'est à dire la réponse du dipôle en l'absence de source. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ae^{rt} où r est un nombre réel ou complexe solution de l'équation caractéristique.

$y_2(t)$ désigne la solution particulière et représente le régime forcé. Le régime forcé a la même forme que le terme d'excitation. Notez bien que le régime forcé est indépendant des conditions initiales.

Si les n racines de l'équation $a_n r^n + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ sont distinctes, la solution est :

$$y_1(t) = \sum_{k=1}^{k=n} A_k \exp(r_k t)$$

On détermine les constantes d'intégration A_k grâce aux conditions initiales qui s'obtiennent en respectant les règles de continuité.

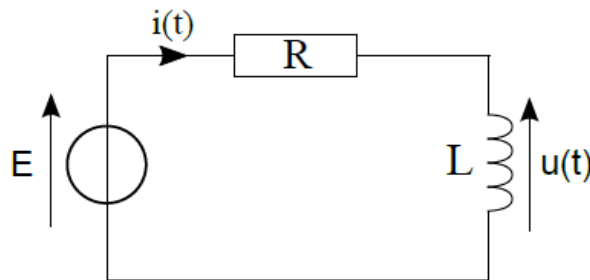
Ces conditions découlent du fait que la puissance électrique est finie.

- i. Dans une branche contenant un condensateur, la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps.
- ii. Dans une branche contenant une bobine, l'intensité électrique la traversant est une fonction continue du temps.

Nous étudierons les circuits d'ordre 1 et d'ordre 2.

3- Circuit R-L

On étudie le circuit RL soumis à une tension $e(t)$, on s'intéresse à l'allure de l'intensité dans le circuit et à la tension aux bornes de la bobine. On considère de plus que la bobine est idéale (Voir figure ci-dessous).



3.1- Equation différentielle

On a la résistance R aux bornes de laquelle la ddp vaut Ri et l'inductance qui se comporte comme un générateur de *f.é.m.* $e_L = -L \frac{di}{dt}$.

La loi des mailles s'écrit :

$$e(t) = Ri - e_L \quad \text{soit} \quad e(t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$

D'où

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{e(t)}{R}$$

avec $\tau = \frac{L}{R}$, homogène à un temps et est appelée le **temps caractéristique** ou **constante de temps** du circuit RL .

Cette équation différentielle est du premier ordre, le circuit RL est appelé circuit du premier ordre. Pour obtenir la solution la générale de cette équation, on additionne une solution de l'équation homogène associée (sans second membre) qui correspond à la réponse du circuit RL sans excitation (c'est ce que l'on appelle le régime libre) et une solution particulière qui correspond au régime permanent.

On s'intéressera ici au circuit soumis à un échelon de tension, donc la tension $e(t)$ est égale à une constante, E pour l'établissement du courant dans la bobine et, 0 pour sa rupture.

3.2-Etablissement du courant

On doit trouver la solution à l'équation :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$i = i_H + i_P$$

Equation homogène : $\tau \frac{di}{dt} + i = 0$ a pour solution :

$$i_H = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

La solution particulière $i_P = cste$ puisque le second membre est constant d'où :

$$\tau \frac{di_P}{dt} + i_P = \frac{E}{R} \quad \text{d'où} \quad i_P = \frac{E}{R}$$

D'où :

$$i = i_H + i_P = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Or à $t = 0 ; i = 0$ d'où $A = -\frac{E}{R}$

On a alors :

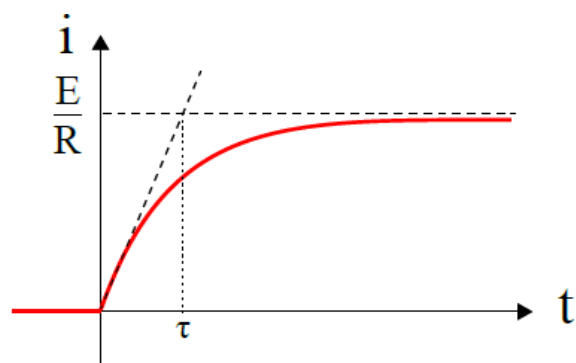
$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Lorsque $t \rightarrow \infty ; i \rightarrow \frac{E}{R} = I$: le régime transitoire s'efface et laisse place au régime permanent continu.

Son allure est représentée ci-contre. La tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$. On peut vérifier que la fonction i est bien continue.

Comme le montre la figure ci-contre, la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ peut être facilement obtenue graphiquement. Ce temps permet de caractériser la vitesse d'établissement du courant, plus il est faible plus le courant s'établit vite.

La durée du régime transitoire i.e., le temps au bout duquel on passe du régime transitoire au régime permanent (temps au bout duquel le courant i est établie à 99% de sa valeurs d'équilibre I) est de l'ordre de 5τ .



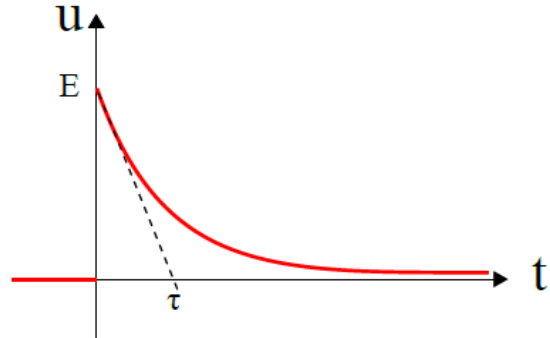
La tension aux bornes de la bobine est donnée par : $u = L \frac{di}{dt}$

D'où

$$u = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Son allure est représentée sur la figure ci-contre. La fonction u est discontinue.

On note qu'en régime transitoire, la bobine cherche à 'contrer' la tension du générateur en imposant une tension de sens opposé (loi de Lenz) alors qu'en régime continu la bobine se comporte comme un fil conducteur ($u = 0$).



3.3-Rupture du courant

On doit trouver la solution à l'équation :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

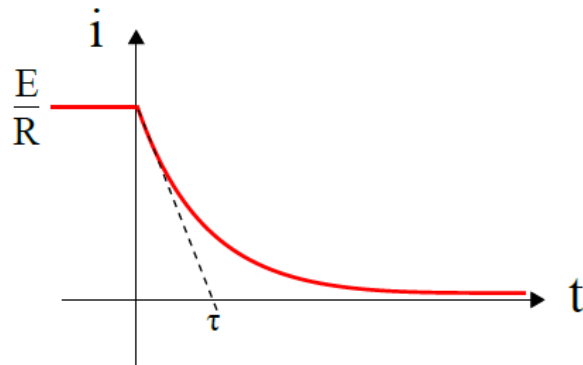
La solution s'écrit : $i = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

Or à $t = 0$; $i = \frac{E}{R}$ d'où $A = \frac{E}{R}$

Finalement, l'intensité dans le circuit lors de la rupture du courant s'écrit :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Son allure est représentée sur la figure ci-contre. On peut vérifier que la fonction i est continue.

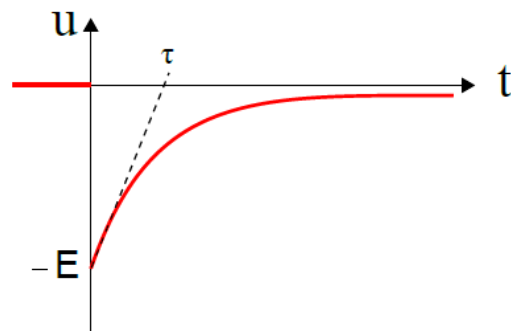


La tension aux bornes de la bobine est donnée par : $u = L \frac{di}{dt}$

D'où

$$u = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Son allure est représentée sur la figure ci-contre. La fonction u est discontinue.



3.4- Aspect énergétique

Considérons le bilan des énergies depuis la fermeture du circuit jusqu'à l'établissement du courant. Reprenons l'équation de la maille, et multiplions cette équation par idt ; nous obtenons :

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow e(t)idt = Ri^2dt + L \frac{di}{dt}idt$$

$$\Rightarrow e(t)idt = Ri^2dt + Lidi$$

$$\Rightarrow e(t)idt = Ri^2dt + d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$e(t)idt$ représente l'énergie fournie par le générateur entre les instants t et $t+dt$.

Ri^2dt est l'énergie dissipée dans la résistance R entre t et $t+dt$.

$d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ correspond à l'énergie emmagasinée dans la bobine.

On peut intégrer ces énergies infinitésimales sur le temps d'établissement complet du courant.

- Énergie fournie par le générateur :

$$W_g = \int_0^\infty Eidt = LI^2$$

- Énergie stockée de façon magnétique dans la bobine :

$$W_L = \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}LI^2$$

- Énergie dissipée par effet Joule : comme la moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans la bobine, cela signifie que l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique :

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2dt = \frac{1}{2}LI^2$$

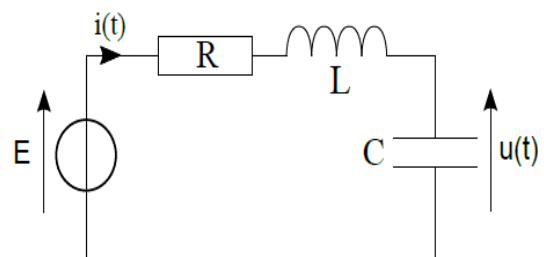
A la rupture du courant, la bobine restitue l'énergie précédemment accumulée au conducteur ohmique qui la dissipe une nouvelle fois par effet Joule. Cette énergie a été stockée par la bobine sous forme magnétique et la restitue sous forme d'énergie électrique.

4- Circuits R-L-C série

Nous allons ici étudier le régime transitoire du circuit RLC série qui comme nous allons le voir donne naissance à des oscillations électriques.

4.1- Equation différentielle

Considérons le circuit ci-contre qui comporte en série, une résistance, une bobine et un condensateur et qui est soumis à une tension $e(t)$. La bobine est supposée idéale. On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur et à l'intensité qui parcourt le circuit.



L'application de la loi des mailles au circuit permet d'écrire :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = e$$

Comme $i = C \frac{du}{dt}$, on a :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = e$$

Cette équation différentielle est une équation du second ordre à coefficient constant, le circuit RLC série est appelé circuit du second ordre.

4.2- Etude du régime libre

Nous allons nous intéresser dans un premier temps au comportement du circuit lorsque le condensateur a été préalablement chargé sous la tension E du générateur, et lorsqu'il se décharge dans la bobine et la résistance.

L'équation différentielle correspondant à ce régime libre (appelé aussi régime propre) est la suivante :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est :

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$$

Trouver les solutions de l'équation caractéristique permet de trouver les solutions de l'équation différentielle.

Pour une meilleure résolution, nous allons utiliser des variables dites « réduite »

4.2.1-Définitions des variables réduites

L'intérêt des variables réduites est d'utiliser des variables de même dimension dans la résolution de l'équation. On peut donc appliquer sa résolution dans n'importe quel système d'unité.

Pulsation propre

Elle correspond à la pulsation des oscillations en l'absence de "frottements" (amortissement par effet Joule ici)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 est exprimée en rad.s^{-1} , L en Henry (H) et C en Farad (F).

Facteur d'amortissement

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

λ est exprimé en s^{-1} , L en H et R en Ω . Plus ce facteur sera grand, plus l'amortissement sera élevé.

Coefficient d'amortissement

Il peut être intéressant de travailler avec une grandeur sans dimension. On définit alors le coefficient d'amortissement par :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

Ce coefficient peut être exprimée en fonction des valeurs des composants du circuit :

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Facteur de qualité

Pour caractériser un circuit, on utilise souvent une autre grandeur appelée facteur de qualité.

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

En utilisant ces variables réduites, on peut donc écrire l'équation caractéristique de la manière suivante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation donne :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad \text{ou} \quad \Delta' = \omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

Selon le signe du discriminant, on distingue trois régimes.

4.2.2-Les différents régimes

1^{er} Cas : Régime apériodique, $\Delta' > 0$

Si $\Delta' > 0$ alors $\lambda > \omega_0$, $\alpha > 1 \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q < \frac{1}{2}$

L'équation caractéristique admet alors deux racines négative :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

On peut utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes A_1 et A_2 .

La continuité de la tension aux bornes du condensateur implique que $u(t=0) = E$.

La continuité de l'intensité dans la bobine implique que $i(t=0) = 0$.

On obtient alors :

$$u(t=0) \text{ conduit à } A_1 + A_2 = E$$

Et

$$i(t=0) \text{ conduit à } r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{r_1 A_1}{r_2}$$

On a alors :

$$A_1 - \frac{r_1 A_1}{r_2} = E$$

$\Rightarrow$

$$A_1 = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1}$$

Et

$$A_2 = \frac{-r_1 E}{r_2 - r_1}$$

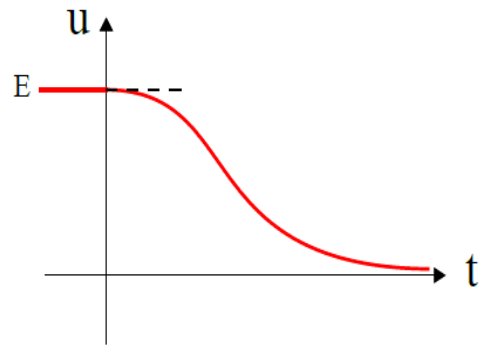
La tension aux bornes du condensateur est donnée finalement par :

$$u(t) = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} - \frac{r_1 E}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}$$

L'allure de la tension est donnée par la figure ci-contre.

Lorsque $\alpha > 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$, il n'y a pas d'oscillations électrique car l'amortissement est trop fort.

On remarque qu'à $t = 0$, la pente de $u(t)$ est nulle ; en effet, $i(t=0) \Rightarrow C \frac{du}{dt} = 0$.

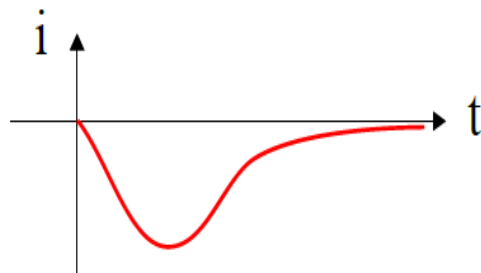


L'intensité de courant dans le circuit est donnée par :

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

Soit

$$i(t) = \frac{r_1 r_2 E C}{r_2 - r_1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$



Son allure est donnée par la figure ci-contre

2^{ème} Cas : Régime critique, $\Delta' = 0$

Si $\Delta' = 0$ alors $\lambda = \omega_0$, $\alpha = 1 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$

L'équation caractéristique admet une racine double négative :

$$r_0 = -\lambda$$

L'équation différentielle aura pour expression :

$$u(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\lambda t}$$

Les constantes sont déterminées à partir des mêmes conditions initiales comme précédemment.

$$u(t = 0) \text{ conduit à } A_2 = E$$

Et

$$i(t = 0) \text{ conduit à } A_1 - \lambda A_2 = 0$$

D'où

$$A_1 = \lambda A_2 = \lambda E$$

La tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$u(t) = E(\lambda t + 1)e^{-\lambda t}$$

Le régime critique est alors un régime apériodique. L'allure de la courbe est identique à celle du régime apériodique avec une décroissance plus rapide que dans le 1^{er} cas.

L'intensité de courant dans le circuit est donnée par :

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

Soit

$$i(t) = -EC\lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

De la même manière que précédemment, on retrouve l'allure de l'intensité du courant du régime apériodique.

3^{ème} Cas : Régime pseudo-périodique, $\Delta' < 0$

$$\Delta' < 0 \text{ alors } \lambda < \omega_0, \alpha < 1 \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. Si on pose $\omega^2 = \Delta'$, on a :

$$r_1 = -\lambda + j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - j\omega$$

La solution de l'équation différentielle est la combinaison linéaire de deux solutions complexes :

$$u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

avec C_1 et C_2 des constantes complexes.

Or nous voulons obtenir une solution réelle. On peut montrer qu'à partir $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$, on peut construire deux solutions réelles tout aussi solutions de la même équation différentielle.

Ces deux solutions réelles sont :

$$\frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} = e^{-\lambda t} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2j} = e^{-\lambda t} \sin(\omega t)$$

La solution réelle de l'équation différentielle est alors :

$$u(t) = (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t))e^{-\lambda t}$$

avec A_1 et A_2 des constantes réelles.

Les constantes sont déterminées à partir des mêmes conditions initiales comme précédemment.

$$u(t = 0) \text{ conduit à } A_1 = E$$

Et

$$i(t = 0) \text{ conduit à } A_2\omega - \lambda A_1 = 0 \text{ soit } A_2 = \frac{\lambda}{\omega} E$$

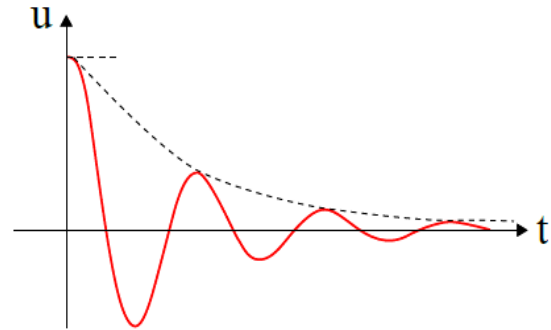
La tension aux bornes du condensateur s'écrit donc :

$$u(t) = E \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right) e^{-\lambda t}$$

L'allure de la tension est donnée par la figure ci-contre.

Cette solution se découpe en deux parties :

- Une partie oscillante à la pulsation ω ;
- Une amplitude décroissance de manière exponentielle.



Remarque

On pourra aussi chercher la solution réelle de l'équation différentielle sous la forme :

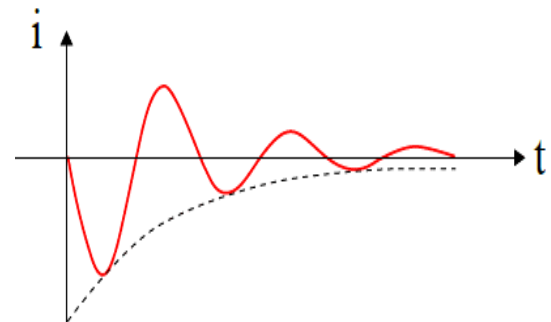
$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) e^{-\lambda t}$$

L'intensité de courant dans le circuit est donnée par :

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

Soit

$$i(t) = -CE \left(\frac{\omega^2 + \lambda^2}{\omega} \right) \sin(\omega t) e^{-\lambda t}$$



Son allure est donnée par la figure ci-contre

Les fonctions $u(t)$ et $i(t)$ admettent de l'oscillation de pulsation ω avec une amplitude qui décroît exponentiellement avec le temps. On parle alors de régime **pseudo-périodique**.

La période des oscillations électriques est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

4.2.3-Aspect énergétique

Reprenons la loi des mailles :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = e$$

Multiplions cette équation par $i = C \frac{du}{dt}$. On a :

$$Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + Cu \frac{du}{dt} = 0$$

Soit :

$$Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{dt} = 0$$

Les trois termes de cette expression représentent :

Ri^2 : la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance ;

$\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$: la puissance reçue par la bobine. Elle peut être positive ou négative et correspond aux variations d'énergie magnétique dans la bobine ;

$\frac{d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{dt}$: la puissance reçue par le condensateur. Elle peut être positive ou négative et correspond aux variations d'énergie électrique dans le condensateur.

Pour obtenir les variations énergétiques, on peut intégrer cette relation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$

On obtient l'équation $W_J + W_C + W_L = 0$.

Cette relation indique que lorsque l'énergie emmagasinée dans le condensateur va varier, elle va se dissiper par effet Joule en partie, la partie restante étant accumulée par la bobine. Puis la bobine cédera son énergie au condensateur et au conducteur ohmique et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'énergie dans le circuit.

4.3- Cas du circuit soumis à un échelon de tension

L'étude se fera comme dans le cas précédent mais avec un second membre constant différent de 0.

L'équation différentielle concernant la tension aux bornes du condensateur dans ce cas a la forme suivante :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = E$$

Ainsi, la solution de cette équation sera la somme de la solution de l'équation homogène u_1 (qui sera identique à celle que l'on a trouvé pour le régime libre dans les trois cas) et d'une solution particulière qui est simplement $u_2 = E$ (solution particulière constante car le deuxième membre est constant).

Mais la détermination des constantes de la solution homogène doit être effectuée en tenant compte de la solution particulière. Ainsi :

- On écrira la solution de l'équation homogène avec ces constantes ;
- On lui ajoutera la solution particulière ;
- Et en dernier lieu, on déterminera les constantes avec les conditions initiales.

V- Généralités sur les signaux périodiques

Un signal temporel est périodique de période T si et seulement si $y(t + T) = y(t) \quad \forall t$. Il est facile de voir que si T est une période alors $2T$ est aussi une période, c'est pourquoi par convention la période est la plus petite valeur possible de T telle que $y(t + T) = y(t) \quad \forall t$.

Le nombre f de périodes dans une seconde s'appelle la fréquence et s'exprime en Hertz

$$f = \frac{1}{T}$$

avec f en Hz et T en s

- **Grandeur sinusoïdale**

Un signal sinusoïdal $y(t)$ s'exprime par :

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Où A désigne l'amplitude ou la valeur crête (même unité que la grandeur), ϕ la phase à l'origine (en radians), ω la pulsation (en rad/s) et $\omega t + \phi$ la phase instantanée. Les caractéristiques sont les suivantes :

- La période est telle que $\omega T = 2\pi$;
- La fréquence vaut donc $f = \frac{\omega}{2\pi}$;
- La valeur moyenne vaut $\bar{y} = 0$;
- La valeur crête à crête vaut $y_{pp} = 2A$;
- La valeur efficace $y_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

- **Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux**

La phase est une grandeur qui dépend du choix de l'origine des temps ; autrement dit la phase est arbitraire. Par contre le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux caractérise le décalage entre les deux courbes sinusoïdales et ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Considérons par exemple deux signaux sinusoïdaux :

$$S_1 = A \cos \omega t$$

$$S_2 = A \cos(\omega t + \phi_2)$$

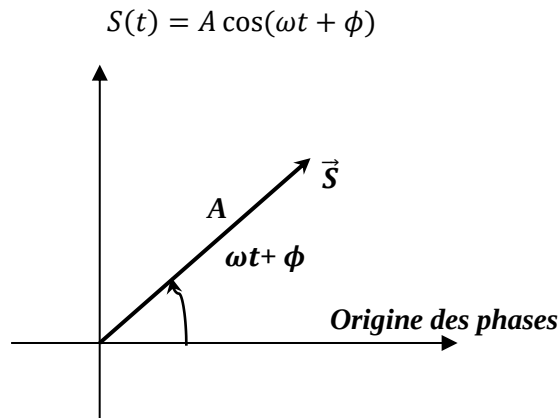
La phase de S_1 vaut $\phi_1 = 0$ et celle de S_2 vaut ϕ_2 . Le déphasage de S_2 par rapport à S_1 vaut $\phi_2 - \phi_1 = \phi$. Suivant le signe de ϕ on dira que S_2 est en avance ou en retard par rapport à S_1 . En effet d'après l'expression de S_1 on voit que le signal atteint son maximum en $t = 0$, alors que S_2 atteint son maximum en $t = -\frac{\phi_2}{\omega}$. Ainsi, si $\phi_2 > 0, t < 0$ ce qui signifie que le signal S_2 est décalé vers la gauche de S_1 et qu'il est en avance sur S_1 . Pour résumer :

- Si $\phi > 0$; S_2 est en avance sur S_1
- Si $\phi < 0$; S_2 est en retard sur S_1

VI- Représentation d'un signal sinusoïdal

1- Représentation de Fresnel

Considérons un signal sinusoïdal $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. On peut représenter cette grandeur sous la forme d'un vecteur dit phaseur ou vecteur de Fresnel : le vecteur fait un angle ϕ avec l'axe des abscisses (origine des phases) et a pour longueur l'amplitude A . La somme des deux signaux sinusoïdaux se représente par la somme de leur vecteur de Fresnel. Le déphasage entre deux signaux correspond à l'angle entre les vecteurs de Fresnel.



2- Représentation complexe

Il existe une autre représentation très utile : on peut considérer que $y(t)$ est la partie réelle d'un nombre complexe :

$$y(t) = \mathcal{R}_e(\underline{y(t)})$$
$$\underline{y(t)} = A \exp j\phi \exp j(\omega t)$$

On dira alors que $\underline{y(t)}$ est le **nombre complexe associé au signal sinusoïdal**. Le nombre complexe $\underline{A} = A \exp j\phi$ est appelé **amplitude complexe**. Lorsque l'on connaît l'amplitude complexe d'un signal on peut en déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase :

$$A = |\underline{A}|$$
$$\phi = \arg \underline{A}$$

Pour deux signaux sinusoïdaux y_1 et y_2 d'amplitude complexe $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$, le déphasage de y_2 par rapport à y_1 vaut :

$$\phi = \arg \underline{A}_2 - \arg \underline{A}_1 = \arg \left(\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} \right)$$

VII- Notion d'impédance : impédance complexe

Cette année nous nous intéressons uniquement au régime sinusoïdal forcé. Nous supposons donc que toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut donc leur associer des grandeurs complexes. Nous

noterons $\underline{U}$, l'amplitude complexe associée à la tension et $\underline{I}$ l'amplitude complexe associée à l'intensité.

La notion d'impédance n'a de sens que pour un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal.

Par définition, l'**impédance** d'un dipôle passif linéaire est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$$

Où R désigne la résistance et X la réactance. Z se mesure en Ω .

Par définition, l'**admittance** du dipôle est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$$

Où G désigne la conductance et S la susceptance. Y se mesure en $\Omega^{-1} = S$ (**Siemens**)

L'impédance d'un dipôle linéaire passif, se déduit de la mesure de la tension U_{eff} , de l'intensité efficace I_{eff} et du déphasage entre la tension et l'intensité. En effet, on a :

$$\frac{U_{eff}}{I_{eff}} = |\underline{Z}|$$

$$\arg \underline{Z} = \phi_u - \phi_i$$

Le tableau ci-dessous donne les impédances des trois dipôles passifs linéaires que nous avons étudiés.

Résistance	Bobine	Condensateur
$u(t) = Ri(t)$	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$
$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$
$\underline{Z}_L = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{C\omega}$

VIII- Lois d'association

Supposons un réseau linéaire constitué de sources sinusoïdales de même fréquence f et de dipôles linéaires au sens où on peut leur associer une impédance complexe. Après un régime transitoire dont la durée est d'autant plus faible que les éléments résistifs sont importants, un régime sinusoïdal de fréquence f s'installe dans toutes les branches du réseau.

Dans ce cas, les lois de Kirchhoff sont satisfaites par des représentations complexes des grandeurs électriques. Autrement dit, les lois des mailles et les lois des nœuds donneront des équations dans $\mathbb{C}$.

En conséquence, les formules d'association des résistances s'étendent aux impédances complexes :

- En série (les conducteurs sont parcourus par le même courant) :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_i \underline{Z}_i$$

- En parallèle (les conducteurs sont soumis à la même tension) :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_i \underline{Y}_i$$

Exemple : Circuit LC série

Considérons une bobine idéale en série avec un condensateur idéal alimenté par un Générateur Basse Fréquence (GBF). L'impédance équivalente du dipôle s'écrit :

$$\underline{Z} = j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

On note qu'il existe une pulsation pour laquelle l'effet capacitif est compensé par l'effet inductif :

$$\underline{Z} = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il s'agit de la condition de résonance du circuit LC. A cette pulsation, l'intensité efficace devient infinie, en régime forcé. Il faut préciser d'une part que le régime sinusoïdal met un temps infini à s'installer. En fait, l'intensité électrique varie comme $t \cos \omega t$. D'autre part, il y a toujours en réalité des effets résistifs et/ou des effets non linéaires qui dissiperont une partie de l'énergie électrique de telle sorte qu'à la résonance, l'amplitude du courant reste finie.

IX- Puissance absorbée par un dipôle linéaire

Supposons un dipôle linéaire en régime sinusoïdal forcé. La tension s'écrit $u(t) = \sqrt{2}U_{eff} \cos \omega t$ et l'intensité du courant $i(t) = \sqrt{2}I_{eff} \cos(\omega t - \phi)$ où ϕ désigne le déphasage de la tension par rapport au courant. La puissance instantanée vaut donc :

$$P(t) = u(t)i(t) = U_{eff}I_{eff}[\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)]$$

On remarque ainsi que cette puissance oscille autour de $U_{eff}I_{eff} \cos \phi$.

Puissance active

Par définition, la puissance active est la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle :

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} P(t) dt = U_{eff}I_{eff} \cos \phi$$

Le $\cos \phi$ est appelé facteur de puissance.

Ainsi tout dipôle résistif dissipe une puissance électrique

$$\bar{P} = RI_{eff}^2$$

L'intensité efficace correspond donc à l'intensité du courant continu qui produirait la même dissipation d'énergie.

Importance du $\cos \phi$: le facteur de puissance d'un dipôle ne dépend que de l'impédance complexe, en effet,

$$\phi = \arg \left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}} \right) = \arg \underline{Z} \Rightarrow \cos \phi = \frac{\Re(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$$

Une installation industrielle ou domestique présente en général un caractère inductif dû à la présence des moteurs (bobinages). Si l'installation consomme une puissance active $\bar{P}$, l'intensité du courant arrivant vaut donc :

$$I_{eff} = \frac{\bar{P}}{U_{eff} \cos \phi}$$

A cette intensité correspond une puissance dissipée par effet joule dans la ligne de transport qui vaut

$$P_{ligne} = RI_{eff}^2 = \frac{R\bar{P}^2}{U_{eff}^2 \cos^2 \phi}$$

Ainsi une faible valeur du facteur de puissance entraîne une perte d'énergie électrique en ligne plus importante.