

Sommaire

- 1 Lois conditionnelles
 - Cas de variables aléatoires réelles

discrètes

- Cas de variables aléatoires réelles continues
- Espérance conditionnelle

Lois conditionnelles

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes. Par analogie à la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B avec $P(B) > 0$, on définit la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ telle que $P(Y = y) \neq 0$ par :

$$P^{Y=y}(X = x) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

La fonction de répartition conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$F_{X/Y}(x|y) = P^{Y=y}(X \leq x) = \sum_{s \leq x} P^{Y=y}(X = s).$$

Lois conditionnelles

Exemple

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. On cherche la loi de X sachant $X + Y = n$, $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)}.$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ et $P(X = k, Y = n - k) = P(X = k)P(Y = n - k)$. Par conséquent,

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\mu^{(n-k)} e^{-\mu}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda + \mu)^n e^{-(\lambda + \mu)}}{n!}}.$$

Après simplification, on obtient

$$P(X = k | X + Y = n) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.$$

On en conclut que la loi de X sachant $X + Y = n$ est la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Remarque 1.1

Lorsque X et Y sont indépendantes, $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$ et $F_{X/Y}(x|y) = F_X(x) = P(X \leq x)$.

Lois conditionnelles

Si les v.a.r. X et Y sont continues, soit $f_{X,Y}(x,y)$ la densité conjointe du couple (X,Y) , $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ leurs densités marginales respectives. Alors il existe des distributions conditionnelles de X sachant Y et de Y sachant X données par

- densité conditionnelle de X sachant $Y = y$:

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{X,y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad \forall y \quad \text{tq} \quad f_Y(y) \neq 0, \quad (1)$$

- densité conditionnelle de Y sachant $X = x$:

$$f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad \forall x \quad \text{tq} \quad f_X(x) \neq 0. \quad (2)$$

Exemple

Soit X et Y de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & \text{si } 0 \leq x \leq y < +\infty \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$I(A)$ désignant ici la fonction indicatrice de l'événement A , on a

$$f_X(x) = 2e^{-2x}I(x \geq 0), \quad f_Y(y) = 2e^{-y}(1 - e^{-y})I(y \geq 0).$$

La densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

$$f_Y^{X=x}(y) = \frac{2e^{-x-y}I(0 \leq x \leq y)}{2e^{-2x}I(x \geq 0)} = e^{x-y}I(0 \leq x \leq y).$$

Exemple

La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est

$$f_X^{Y=y}(x) = \frac{2e^{-x-y}I(0 \leq x \leq y)}{2e^{-y}(1 - e^{-y})I(y \geq 0)} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-y}}I(0 \leq x \leq y).$$

Espérance conditionnelles

Cas discret :

Pour tout y telle que $P(Y = y) > 0$, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ par

$$E(X|Y = y) = \sum_x x P^{Y=y}(X = x) = \sum_x x P(X = x|Y = y) \quad (3)$$

cas continu :

Lorsque les v.a. X et Y sont continues, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ pour tout y telle que $f_Y(y) > 0$ par

$$E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_X^{Y=y}(x) dx. \quad (4)$$

Exemple

Soit X et Y de densité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^y e^{-x/y}}{y} I(x > 0, y > 0)$.

On a d'abord, en se rappelant que $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B$,

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{\int_0^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx} \\ &= \frac{y^{-1} e^y e^{-x/y} I(x > 0, y > 0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} y^{-1} e^y e^{-x/y} I(x > 0, y > 0) dx} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} I(y > 0). \end{aligned}$$

Donc pour tout $y > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{y}$ et cette loi a pour espérance y . Ce qui veut dire que

$$E(X|Y = y) = \int_0^{+\infty} xy^{-1} e^y e^{-x/y} dx = y.$$

Espérance conditionnelles

Notons que $E(X|Y)$ est une variable aléatoire réelle qui est de la forme $E(X|Y) = f \circ Y = f(Y)$, f étant la fonction réelle $x \mapsto f(y) = E(X|Y = y)$. On a

Théorème 1.1: (Espérance successive)

$$E(E(X|Y)) = E(X) \quad (5)$$

Si Y est discrète, ce théorème dit que

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y) \quad (6)$$

et dans le cas cas continu, il dit que

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \int_{\mathbb{D}} E(X|Y = y)f_Y(y)dy. \quad (7)$$