

Phy 208 “Introduction à la Physique Quantique”

Exercices d'applications sur le Chapitre 3

Vitesse de phase et vitesse de groupe

Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour chacune des lois de dispersion suivantes et tracer dans chaque cas les courbes représentant la loi de dispersion $\omega(k)$ et les variations en fonction de ω des vitesses de phase et de groupe :

- (i) onde lumineuse dans le vide : $\omega = ck$
- (ii) ondes de gravité à la surface de l'eau : $\omega = \alpha\sqrt{k}$
- (iii) ondes électromagnétiques dans l'ionosphère : $\omega = \sqrt{k^2c^2 + \delta^2}$
- (iv) ondes associées aux électrons libres dans un solide : $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$

c est la célérité de la lumière dans le vide, α et δ des constantes caractéristiques des lois envisagées.

Principe d'incertitude d'Heisenberg

- (i) Supposons que la quantité de mouvement d'une particule donnée puisse être mesurée au millièème. Quelle sera l'incertitude minimum sur la position de cette particule si :
 - elle est une masse de $1mg$ de vitesse $2m/s$
 - elle est un électron dont la vitesse est $1,8 \times 10^8 m/s$.
- (ii) Quelle est l'incertitude minimale sur la position d'un photon de longueur d'onde $3000 \text{ \AA}$ si celle-ci est connue au millionième.
- (iii) Quelle est l'incertitude minimum sur l'état d'énergie d'un atome si un électron demeure dans cet état pendant $10^{-8}s$?
- (iv) La largeur d'une des raies spectrales l'atome d'Hydrogène, de longueur d'onde $6563 \text{ \AA}$, a été mesurée égale à $10^{-4} \text{ \AA}$. Quel est le temps moyen pendant lequel le système atomique demeure dans l'état d'énergie correspondant ?
- (v) Soit le paquet d'ondes gaussien suivant, défini sur l'axe des x , associé à $t = 0$, à une particule libre de masse m :

$$\psi(x, 0) = Ae^{ik_0x}e^{-x^2/a^2} \quad \text{avec } A \text{ supposé réel.}$$

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, déterminer pour cette particule, à $t = 0$, les densités de probabilités $\pi(x, 0)$ et $\pi(k)$ relatives à la variable x et à la variable k . Calculer $\Delta x(0)$ et $\Delta(k)$. Exprimer $\pi(x, 0)$ en fonction de la

dispersion $\Delta x(0)$. Vérifier l'égalité $\Delta x(0)\Delta k = \frac{1}{2}$.

Transformation de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

(a) Fonction créneau :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

(b) Fonction exponentielle décroissante :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right)$$

(c) Fonction gaussienne

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

(d) Fonction lorentzienne

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

a étant un réel positif.

2. En notant $F(k)$ et $G(k)$ les transformées de Fourier des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ respectivement, calculer $G(k)$ dans les cas suivants :

$$(i) \quad g(x) = f(x + a)$$

$$(ii) \quad g(x) = \exp(ik_0x) f(x)$$

$$(iii) \quad g(x) = f(\lambda x)$$

$$(iv) \quad g(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$(v) \quad g(x) = xf(x)$$

$$(vi) \quad g(x) = f^*(x)$$