

Corrigé de la fiche de TD N° 2 -Analyse 2

Equations différentielles

I. Equations différentielles du 1er ordre

Exercice 1 (*Equations différentielles à variables séparables*)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $(x+1)y' + y = 0$
- 2) $y' \sin x - y \cos x = 0$
- 3) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0$ vérifiant $y(0) = 1$

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles à variables séparables s'écrivent sous la forme :

$$y' = f(x)g(y)$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

1) $(x+1)y' + y = 0 \dots (E)$

Remarque : $y = 0$ est une solution de (E)

si $y \neq 0$:

$$(x+1)y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{x+1}y$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+1}y \iff \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x+1}dx$$

d'où

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x+1}dx \implies \ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln \frac{1}{|x+1|} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\implies |y| = \frac{1}{|x+1|}e^C \implies y = \pm e^C \frac{1}{x+1} \implies y = \frac{k}{x+1}, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Puisque $y = 0$ est solution de (E) alors :

$$y = \frac{K}{x+1}, \quad K \in \mathbb{R}$$

2) $y' \sin x - y \cos x = 0 \dots (F)$

Remarque : $y = 0$ est une solution de (F)

si $y \neq 0$:

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \iff y' = \frac{\cos x}{\sin x} y$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} y \iff \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$d'où \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \implies \ln |y| = \ln |\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = |\sin x| e^C \implies y = \pm e^C \sin x \implies y = k \sin x, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Puisque $y = 0$ est solution de (F) alors :

$$y = K \sin x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

3) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0 \dots (G)$

Remarque : $y = 0$ est une solution de (G)

si $y \neq 0$:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0 \iff y' = -\frac{x}{1-x^2} y$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1-x^2} y \iff \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1-x^2} dx$$

$$d'où \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{x}{1-x^2} dx \implies \ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = \sqrt{|1-x^2|} e^C \implies y = \pm e^C \sqrt{|1-x^2|}$$

$$\implies y = k \sqrt{|1-x^2|}, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Puisque $y = 0$ est solution de (G) alors :

$$y = K \sqrt{|1-x^2|}, \quad K \in \mathbb{R}$$

On cherche la solution qui vérifie la condition $y(0) = 1$.

$$y(0) = 1 \iff K = 1$$

$$d'où \quad y = \sqrt{|1-x^2|}$$

Exercice 2 (Equations différentielles homogènes)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $x \left(y' - \frac{y}{x} \right) - y + x = 0$

2) $y'(2\sqrt{xy} - x) + y = 0$, sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = 1$

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles homogènes s'écrivent sous la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

1) $x \left(y' - \frac{y}{x}\right) - y + x = 0 \dots (E)$

$$x \left(y' - \frac{y}{x}\right) - y + x = 0 \iff y' = 2\frac{y}{x} - 1$$

on pose $t = \frac{y}{x} \iff y = tx$, donc $y' = t'x + t$

$$d'où $t'x + t = 2\frac{y}{x} - 1 = 2t - 1 \implies t'x = t - 1$$$

ainsi $t' = \frac{1}{x}(t - 1)$: c'est une équation différentielle à variables séparables.

$$\text{donc } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}(t - 1) \iff \frac{dt}{t - 1} = \frac{dx}{x} \quad \text{si } t - 1 \neq 0$$

$$d'où \int \frac{dt}{t - 1} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln |t - 1| = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies |t - 1| = |x| e^C \implies t - 1 = \pm e^C x \implies t = kx + 1, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Par conséquent } y = tx = kx^2 + x$$

Les solutions singulières :

si $t - 1 = 0 \implies t = 1 \implies y = x$: c'est la solution singulière de l'équation (E).

2) $y'(2\sqrt{xy} - x) + y = 0$, sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = 1 \dots (F)$

$$y'(2\sqrt{xy} - x) + y = 0 \iff y' \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right) + \frac{y}{x} = 0$$

$$\iff y' = -\frac{\frac{y}{x}}{2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1} \quad \text{avec } 2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 \neq 0$$

On pose $t = \frac{y}{x} \iff y = tx$, donc $y' = t'x + t$

$$d'où $t'x + t = -\frac{\frac{y}{x}}{2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1} = \frac{-t}{2\sqrt{t} - 1} \implies t'x = \frac{-2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t} - 1}$$$

ainsi $t' = \frac{1}{x} \left(\frac{-2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t} - 1} \right)$: c'est une équation différentielle à variables séparables.

$$\text{donc } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \left(\frac{-2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}-1} \right) \iff \left(\frac{2\sqrt{t}-1}{-2t\sqrt{t}} \right) dt = \frac{dx}{x} \quad \text{si } t \neq 0$$

d'où

$$\int \left(\frac{2\sqrt{t}-1}{-2t\sqrt{t}} \right) dt = \int \frac{dx}{x} \implies \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} \right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\implies -\ln t - \frac{1}{\sqrt{t}} = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies \ln(xt) = -\frac{1}{\sqrt{t}} - C \implies xt = e^{-\frac{1}{\sqrt{t}} - C}$$

$$\text{Par conséquent } y = e^{-\sqrt{\frac{x}{y}} - C}$$

Les solutions singulières :

si $t = 0 \implies y = 0$: c'est la solution singulière de l'équation (F)

On cherche la solution qui vérifie la condition $y(1) = 1$

$$y(1) = 1 \iff e^{-1-C} = 1 \iff C = -1$$

$$\text{d'où } y = e^{-\sqrt{\frac{x}{y}} + 1}$$

Exercice 3 (Equations différentielles linéaires du 1er ordre)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $y' + xy = x$

2) $y' - \frac{y}{x} = \ln x$

3) $x(x^2 + 1)y' - 2y = x^3(x - 1)e^{-x}$

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles linéaires du 1er ordre s'écrivent sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

1) $y' + xy = x \dots (E)$

La solution générale de (E) : $y_G = y_p + y$

où y_p est une solution particulière de (E)

et y est la solution générale de l'équation sans second membre

(E₀) : $y' + xy = 0$

On remarque que $y_p = 1$ est une solution particulière de (E).

On cherche maintenant la solution générale de l'équation sans second membre

$(E_0) : y' + xy = 0$ c'est une équation différentielle à variables séparables

On remarque que $y = 0$ est solution de (E_0) .

Si $y \neq 0$:

$$y' + xy = 0 \iff y' = -xy$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = -xy \iff \frac{dy}{y} = -x dx$$

d'où

$$\int \frac{dy}{y} = - \int x dx \implies \ln |y| = -\frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = e^{-\frac{x^2}{2}} e^C \implies y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\implies y = k e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Puisque $y = 0$ est solution de (E_0) alors

$$y = K e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Par conséquent la solution générale de (E) est donnée par :

$$y_G = y_p + y = 1 + K e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2) $y' - \frac{y}{x} = \ln x \dots (F)$

La solution générale de $(F) : y_G = y_p + y$

où y_p est une solution particulière de (F)

et y est la solution générale de l'équation sans second membre

$$(F_0) : y' - \frac{y}{x} = 0$$

La solution particulière y_p de (F) n'étant pas évidente, on cherche tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre

$(F_0) : y' - \frac{y}{x} = 0$ c'est une équation différentielle à variables séparables

On remarque que $y = 0$ est solution de (F_0) .

Si $y \neq 0$:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \iff y' = \frac{y}{x}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \iff \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln |y| = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies |y| = |x| e^C \implies y = \pm e^C x \implies y = kx, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Puisque $y = 0$ est solution de (F_0) alors :

$$y = Kx, \quad K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la solution particulière, on applique **la méthode de variation de la constante (MVC)**. Cette méthode consiste à remplacer la constante K par une fonction $K(x)$.

On pose : $y = K(x)x$

alors $y' = K'(x)x + K(x)$

On remplace y et y' dans l'équation (F) pour obtenir $K'(x)$:

$$K'(x)x + K(x) - \frac{K(x)x}{x} = \ln x \implies K'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\implies K(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

On pose $U = \ln x \implies dU = \frac{1}{x} dx$

$$K(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int U dU = \frac{U^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où y = K(x)x = \frac{(\ln x)^2}{2}x + Cx$$

$$3) x(x^2 + 1)y' - 2y = x^3(x - 1)e^{-x} \dots (G)$$

La solution particulière y_p de (G) n'étant pas évidente, on cherche tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre

$(G_0) : x(x^2 + 1)y' - 2y = 0$ c'est une équation différentielle à variables séparables

On remarque que $y = 0$ est solution de (G_0) .

Si $y \neq 0$:

$$x(x^2 + 1)y' - 2y = 0 \iff y' = \frac{2}{x(x^2 + 1)}y$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x(x^2 + 1)}y \iff \frac{dy}{y} = \frac{2}{x(x^2 + 1)}dx$$

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$\implies \ln |y| = 2 \ln |x| - \ln(x^2 + 1) + C = \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où y = \frac{Kx^2}{x^2 + 1}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la solution particulière, on applique **la méthode de variation de la constante (MVC)**. Cette méthode consiste à remplacer la constante K par une fonction $K(x)$.

On pose : $y = \frac{K(x)x^2}{x^2 + 1}$

$$alors y' = \frac{K'(x)x^2(x^2 + 1) + 2xK(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

On remplace y et y' dans l'équation (G) pour obtenir $K'(x)$:

$$x(x^2 + 1) \frac{K'(x)x^2(x^2 + 1) + 2xK(x)}{(x^2 + 1)^2} - 2 \frac{Kx^2}{x^2 + 1} = x^3(x - 1)e^{-x}$$

donc $K'(x) = (x - 1)e^{-x} \implies K(x) = \int (x - 1)e^{-x} dx$

En faisant une intégration par parties on obtient

$$K(x) = -xe^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où \quad y = \frac{K(x)x^2}{x^2 + 1} = \frac{(-xe^{-x} + C)x^2}{x^2 + 1} = \frac{-x^3e^{-x}}{x^2 + 1} + \frac{Cx^2}{x^2 + 1}$$

Exercice 4 (Equations différentielles de Bernoulli)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $xy' + y = y^2 \ln x$

2) $(1 - x^3)y' + 3x^2y = -y^2$

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles de Bernoulli s'écrivent sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

où $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

On divise l'équation par y^k ($y \neq 0$), ensuite on fait le changement de variable $z = y^{1-k}$

1) $xy' + y = y^2 \ln x \dots\dots (E)$

Remarque : $y = 0$ est une solution de (E)

si $y \neq 0$:

On divise l'équation (E) par y^2 , on obtient

$$xy'y^{-2} + y^{-1} = \ln x \dots\dots (E')$$

On pose $z = y^{-1}$, donc $z' = -y'y^{-2}$

On remplace dans l'équation (E'), on trouve

$$-xz' + z = \ln x \dots (E_\ell) : \text{c'est une équation différentielle linéaire}$$

d'ordre 1.

On résoud cette équation par la méthode de variation de la constante (voir exercice 3), on obtient

$$z = K(x)x = \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C\right)x = \ln x + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où \quad y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$

$$2) (1 - x^3)y' + 3x^2y = -y^2 \dots\dots(F)$$

Remarque : $y = 0$ est une solution de (F)

si $y \neq 0$:

On divise l'équation (F) par y^2 , on obtient

$$(1 - x^3)y'y^{-2} + 3x^2y^{-1} = -1 \dots\dots(F')$$

On pose $z = y^{-1}$, donc $z' = -y'y^{-2}$

On remplace dans l'équation (F'), on trouve

$-(1 - x^3)z' + 3x^2z = -1 \dots(F_\ell)$: c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On résoud cette équation par la méthode de variation de la constante (voir exercice 3), on obtient

$$z = \frac{K(x)}{1 - x^3} = \frac{x + C}{1 - x^3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où \quad y = \frac{1}{z} = \frac{1 - x^3}{x + C}$$

Exercice 5 (*Equations différentielles de Riccati*)

1) Soit l'équation différentielle:

$$2y' \cos x - 2y \sin x = y^2 \dots\dots(1)$$

a) Donner le type de cette équation.

b) Trouver la solution générale de (1)

2) Soit l'équation différentielle (de **Riccati**) définie par :

$$2y' \cos x = y^2 + 2 \cos^2 x - \sin^2 x \dots\dots(2)$$

c) Vérifier que $y_0 = \sin x$ est une solution particulière de (2).

d) En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$ rendre l'équation (2) sous la forme (1).

En déduire la solution générale de (2).

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles de **Riccati** s'écrivent sous la forme :

$$y' + a(x)y = b(x)y^2 + c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$.

1) Soit l'équation différentielle:

$$2y' \cos x - 2y \sin x = y^2 \dots (1)$$

a) Donner le type de cette équation.

C'est une équation différentielle de Bernoulli avec $k = 2$

b) Trouver la solution générale de (1)

Remarque : $y = 0$ est une solution de (1)

si $y \neq 0$:

On divise l'équation (1) par y^2 , on obtient

$$2y'y^{-2} \cos x - 2y^{-1} \sin x = 1 \dots (1')$$

On pose $z = y^{-1}$, donc $z' = -y'y^{-2}$

On remplace dans l'équation (1'), on trouve

$-2z' \cos x - 2z \sin x = 1 \dots (E_\ell)$: c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

On résout cette équation par la méthode de variation de la constante (voir exercice 3), on obtient

$$z = K(x) \cos x = \left(-\frac{1}{2} \tan x + C\right) \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$d'où \quad y = \frac{1}{z} = \frac{2}{-\sin x + C \cos x}$$

2) Soit l'équation différentielle (de Riccati) définie par :

$$2y' \cos x = y^2 + 2 \cos^2 x - \sin^2 x \dots (2)$$

c) Vérifier que $y_0 = \sin x$ est une solution particulière de (2).

$$y_0 = \sin x \implies y'_0 = \cos x$$

On remplace dans l'équation (2) : $2y'_0 \cos x = y_0^2 + 2 \cos^2 x - \sin^2 x \iff 2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x$

donc $y_0 = \sin x$ est bien une solution particulière de (2).

d) En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$ rendre l'équation (2) sous la forme (1).

$$u = y - y_0 \implies y = u + y_0 = u + \sin x \implies y' = u' + \cos x$$

On remplace dans l'équation (2) :

$$2(u' + \cos x) \cos x = (u + \sin x)^2 + 2 \cos^2 x - \sin^2 x \\ \implies 2u' \cos x - 2u \sin x = u^2 : \text{c'est l'équation (1)}$$

Donc la solution générale de cette équation est donnée d'après la question b) par

$$u = \frac{2}{-\sin x + C \cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

d'où $y = u + \sin x = \frac{2}{-\sin x + C \cos x} + \sin x$ est la solution générale de (2).

II. Equations différentielles du 2ème ordre

Exercice 6 (*Equations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants*)

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- 1) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- 2) $y'' + 2y' + 5y = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
- 3) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$
- 4) $y'' - y' + y = 2x^2e^{-x}$
- 5) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$

Solution :

Rappel :

Les équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants s'écrivent sous la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x).....(E)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

La solution générale de (E) s'écrit sous la forme : $y = y_p + y_0$

où y_p est une solution particulière de (E) et y_0 est la solution générale de l'équation sans second membre (E_0).

$y'' + ay' + by = 0....(E_0)$ est l'équation sans second membre.

$r^2 + ar + b = 0.....(E_c)$ est l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles r_1 et r_2 , dans ce cas la solution de (E_0) s'écrit sous la forme :

$$y_0 = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, on a une racine double r , dans ce cas la solution de (E_0) s'écrit sous la forme :

$$y_0 = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes et conjuguées $r = \alpha \pm \beta i$, dans ce cas la solution de (E_0) s'écrit sous la forme :

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de l'équation avec second membre :

$$y'' + ay' + by = f(x)....(E)$$

On cherche la solution générale de (E) en utilisant la méthode de variation des constantes. Cette méthode consiste à remplacer les constantes C_1 et C_2 par des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$.

Soit $y_0 = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ la solution générale de (E_0)

On pose $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

Pour trouver $C_1(x)$ et $C_2(x)$, on résoud le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{cases}$$

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 1 \implies r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

donc $y_0 = C_1e^x + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) $y'' + 2y' + 5y = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

L'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta = -16 = 16i^2 \implies r = -1 \pm 2i$

donc $y_0 = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

On cherche la solution particulière qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

$y(0) = 0 \iff C_1 = 0$

donc $y_0 = C_2e^{-x} \sin(2x) \implies y_0' = -C_2e^{-x} \sin(2x) + 2C_2e^{-x} \cos(2x)$

$y'(0) = 1 \iff C_2 = \frac{1}{2}$

d'où $y_0 = \frac{1}{2}e^{-x} \sin(2x)$

3) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x \dots\dots(E)$

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$y'' - 2y' + y = 0 \dots\dots(E_0)$

L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta = 0 \implies r = 1$: racine double

donc $y_0 = C_1e^x + C_2xe^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

On cherche maintenant la solution générale de (E) en utilisant la méthode de variation des constantes. Cette méthode consiste à remplacer les constantes C_1 et C_2 par des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$.

On pose $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

où $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$

Pour trouver $C_1(x)$ et $C_2(x)$, on résoud le système suivant :

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x &= 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x &= (x^2 + 1)e^x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x & = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(x+1) & = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1'(x) & = -C_2'(x)x \\ C_2'(x) & = x^2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1'(x) & = -x^3 - x \\ C_2'(x) & = x^2 + 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} C_1(x) & = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + K_1 \\ C_2(x) & = \frac{x^3}{3} + x + K_2 \end{cases}$$

donc $y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = (-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + K_1)e^x + (\frac{x^3}{3} + x + K_2)xe^x$

d'où $y = (\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + K_1 + K_2x)e^x$ est la solution générale de (E).

4) $y'' - y' + y = 2x^2e^{-x} \dots (F)$

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$y'' - y' + y = 0 \dots (F_0)$

L'équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0 \dots (F_c)$

$\Delta = -3 = 3i^2 \implies r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

donc $y_0 = e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

On cherche maintenant une solution particulière de (F) en utilisant la deuxième méthode :

le second membre de l'équation (F) s'écrit sous la forme

$f(x) = 2x^2e^{-x} = P_2(x)e^{\lambda x}$

avec $\lambda = -1$ et $P_2(x) = 2x^2$ polynôme de degré 2.

$\lambda = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (F_c), donc la solution particulière de l'équation (F) s'écrit sous la forme

$y_p = Q_2(x)e^{\lambda x} = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

On calcule y_p' et y_p'' :

$y_p' = -(ax^2 + bx + c)e^{-x} + (2ax + b)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$

$y_p'' = -(-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} + (-2ax + 2a - b)e^{-x}$

$= (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$

On remplace y_p' et y_p'' dans l'équation (F), on obtient

$(ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x} = 2x^2e^{-x}$

$\iff 3ax^2 + (-6a + 3b)x + 2a - 3b + 3c = 2x^2$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} 3a & = & 2 \\ -6a + 3b & = & 0 \\ 2a - 3b + 3c & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 2/3 \\ b & = & 4/3 \\ c & = & 8/9 \end{cases}$$

donc $y_p = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}\right)e^{-x}$

d'où la solution générale de (F) est

$$y = y_p + y_0$$

$$y = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}\right)e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

5) $y'' - y = -6 \cos x + 2 \sin x \dots (G)$

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$y'' - y = 0 \dots (G_0)$$

L'équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0 \dots (G_c)$

$$\implies r^2 = 1 \implies r_1 = 1, r_2 = -1$$

donc $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

On cherche maintenant une solution particulière de (G) en utilisant la deuxième méthode :

le second membre de l'équation (G) s'écrit sous la forme

$$f(x) = e^{\lambda x} [P_0(x) \cos(\gamma x) + Q_0(x) \sin(\gamma x)] = -6 \cos x + 2 \sin x$$

avec $\lambda = 0, \gamma = 1, P_0(x) = -6$ et $Q_0(x) = 2$ polynômes de degré

0.

$\lambda + \gamma i = i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (G_c), donc la solution particulière de l'équation (G) s'écrit sous la forme

$$y_p = e^{\lambda x} [U_0(x) \cos(\gamma x) + V_0(x) \sin(\gamma x)] = A \cos(x) + B \sin(x)$$

On calcule y'_p et y''_p :

$$y'_p = -A \sin x + B \cos x$$

$$y''_p = -A \cos x - B \sin x$$

On remplace y'_p et y''_p dans l'équation (G), on obtient

$$-A \cos x - B \sin x - A \cos x - B \sin x = -6 \cos x + 2 \sin x$$

$$\implies -2A \cos x - 2B \sin x = -6 \cos x + 2 \sin x$$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} -2A & = & -6 \\ -2B & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = & 3 \\ B & = & -1 \end{cases}$$

donc $y_p = 3 \cos(x) - \sin(x)$

d'où la solution générale de (G) est

$$y = y_p + y_0 = 3 \cos(x) - \sin(x) + C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 : Soit l'équation différentielle suivante:

$$y'' + 3y' + 2y = x + e^{-x} \dots\dots (E)$$

1) Trouver la solution générale y_0 de l'équation sans second membre suivante :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \dots\dots (E_0)$$

L'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0 \dots\dots (E_c)$

$\Delta = 1 \implies r_1 = -1$ et $r_2 = -2$

donc $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Trouver la solution particulière y_1 de l'équation :

$$y'' + 3y' + 2y = x \dots\dots (E_1)$$

$$f_1(x) = x = P_1(x)e^{\lambda x}$$

avec $\lambda = 0$ et $P_1(x) = x$ polynôme de degré 1.

$\lambda = 0$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c), donc la solution particulière de l'équation (E_1) s'écrit sous la forme

$$y_1 = Q_1(x)e^{\lambda x} = ax + b$$

donc $y'_1 = a$ et $y''_1 = 0$:

On remplace dans l'équation (E_1) on trouve :

$$3a + 2ax + 2b = x \implies 2a = 1 \text{ et } 3a + 2b = 0 \implies a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{4}$$

$$\text{donc } y_1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

3) Trouver la solution particulière y_2 de l'équation:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \dots\dots (E_2)$$

$$f_2(x) = e^{-x} = P_0(x)e^{\lambda x}$$

avec $\lambda = -1$ et $P_0(x) = 1$ polynôme de degré 1.

$\lambda = -1$ est racine simple de l'équation caractéristique (E_c), donc la solution particulière de l'équation (E_2) s'écrit sous la forme

$$y_2 = Q_0(x)e^{\lambda x} = xAe^{-x}$$

$$\text{donc } y'_2 = -xAe^{-x} + Ae^{-x} = (-Ax + A)e^{-x}$$

$$\text{et } y''_2 = -(-Ax + A)e^{-x} + -Ae^{-x} = (Ax - 2A)e^{-x}$$

On remplace dans l'équation (E_2) on trouve :

$$(Ax - 2A)e^{-x} + 3(-Ax + A)e^{-x} + 2xAe^{-x} = e^{-x} \iff A = 1$$

donc $y_2 = xe^{-x}$

4) En déduire la solution générale de l'équation (E).

D'après le principe de superposition la solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + xe^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 1) Calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}$$

On décompose la fraction en éléments simples

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) En déduire l'intégrale suivante:

$$J = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} dx$$

En faisant une intégration par parties on obtient

$$J = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} + \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} + I$$

d'où

$$J = -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} + \frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3) Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant son type:

$$(E) : (x+1)y' + y = \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on résout en utilisant la méthode de variation de la constante. On trouve

$$y = \frac{K(x)}{1+x} \text{ avec } K(x) = J$$

d'où

$$y = -\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} + \frac{1}{2} \frac{\ln|1+x|}{1+x} - \frac{1}{4} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} + \frac{C}{1+x}, \quad C \in \mathbb{R}$$
