

Sommaire

1 Vecteurs Gaussiens

- Représentation de lois normales
- Singularité et absolue continuité

Vecteurs Gaussiens

Définition 1.1: Lois normales sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est normal ou gaussien s'il existe $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et positive telle que

$$\Phi_X(t) = e^{i\langle t, m \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma t, t \rangle}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

où $\langle t, m \rangle = \sum_{i=1}^n t_i m_i$ et $\langle \Gamma t, t \rangle = t' \Gamma t = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \gamma_{ij} t_i t_j$, γ_{ij} étant les éléments de la matrice Γ . On note $X \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma)$.

Vecteurs Gaussiens

Théorème 1.1

Un v.a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ est gaussien si et seulement si, toute combinaison linéaire ou affine des X_i suit une loi normale sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.1

Si $X = (X_1, \dots, X_n) \rightsquigarrow \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma)$ alors $\vec{m} = (E(X_i))_{1 \leq i \leq n}$ et $\Gamma = [\text{Cov}(X_i, X_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$.

Vecteurs Gaussiens

Théorème 1.2

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$: $X \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma)$ et soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction affine : $g(x) = \varphi(x) + b$ avec $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Alors $g(X)$ est gaussien de loi $\mathcal{N}(g(m), \varphi \Gamma {}^t\varphi)$.

Vecteurs Gaussiens

Soit $m \in \mathbb{R}^n$, Γ une matrice symétrique d'ordre n et $X \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma)$. Si Γ est du type positif de rang $p < n$, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle Γ est semblable à $\tilde{\Gamma} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$ avec $\lambda_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$. Soit P la matrice de passage. P est orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$ et on a $\Gamma = P \tilde{\Gamma} {}^tP$. Posons $Y = {}^tP(X - m)$. Y est gaussienne comme fonction linéaire d'un vecteur gaussien. On a $E(Y) = 0$ et

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= e^{-\frac{1}{2} \langle {}^tP \Gamma P t, t \rangle} = e^{-\frac{1}{2} \langle \tilde{\Gamma} t, t \rangle} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \lambda_i t_i^2} = \prod_{i=1}^p e^{-\frac{1}{2} \lambda_i t_i^2} \\ &= \Phi_{\mathcal{N}(0, \lambda_1)}(t_1) \times \Phi_{\mathcal{N}(0, \lambda_2)}(t_2) \times \dots \times \Phi_{\mathcal{N}(0, \lambda_p)}(t_p) \times \Phi_{\delta_0}(t_{p+1}) \times \dots \times \Phi_{\delta_0}(t_n) \\ &= \Phi_{\mathcal{N}(0, \lambda_1) \otimes \mathcal{N}(0, \lambda_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(0, \lambda_p) \otimes \delta_0 \otimes \dots \otimes \delta_0}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Vecteurs Gaussiens

Donc $Y = (Y_1, \dots, Y_p, 0, \dots, 0)$ avec $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ indépendantes telles que pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, où les $\sigma_i^2 = \lambda_i$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes Γ . On a donc $X = PY + m$.

En conclusion, si X est un v.a. gaussien dans $\mathbb{R}^n$: $X \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma_X)$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive, de rang p , il existe une suite de p v.a.r. $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ respectivement où les λ_i sont les valeurs propres non nulles de Γ_X et une matrice orthogonale P telles que $Y = (Y_1, \dots, Y_p, 0, \dots, 0)$ et $X = PY + m$. Réciproquement, on a

Théorème 1.3

$\forall \vec{m} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \Gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive, il existe un v.a. X dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X \sim \mathcal{N}(\vec{m}, \Gamma)$.

Vecteurs Gaussiens

Théorème 1.4

Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$ de moyenne $\vec{m}$ et de variance Γ_X .

- ① Si $rg(\Gamma_X) < n$, alors X reste presque sûrement dans un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $rg(\Gamma_X)$.
- ② Si $rg(\Gamma_X) = n$ alors X est continue admettant pour densité de probabilité f_X donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Gamma_X}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle \Gamma_X^{-1}(x - m), (x - m) \rangle \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Vecteurs Gaussiens

Remarque 1.1

- ❶ Pour $n = 1$, X gaussienne sur $\mathbb{R}$ de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\Gamma = \sigma^2$ si et seulement, $\Phi_X(t) = e^{itm} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- ❷ Pour $\sigma = 0$, $\Phi_X(t) = e^{itm} = \Phi_{\delta_m}(t)$ et $X \rightsquigarrow \delta_m$ où δ_m est la mesure de Dirac en m , par conséquent $X = m$ *p.s.* On dit que X ou la loi de X est dégénérée.

Vecteurs Gaussiens

Exercice 1.1: Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ et soit I et J deux parties disjointes de $\{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que si $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ alors $(X_i)_{i \in I}$ et $(X_j)_{j \in J}$ sont indépendantes.

indication

Posons $Y = (X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n) = (U, V)$ avec $U = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $V = (X_{p+1}, \dots, X_n)$. Alors $\Gamma_Y = \begin{bmatrix} \Gamma_U & 0 \\ 0 & \Gamma_V \end{bmatrix}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^n$, $t = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\Phi_Y(t) = \Phi_Y(u, v) = \Phi_U(u) \cdot \Phi_V(v)$.