

# Sommaire

## 1 Rappels de dénombrement

# Les ensembles et sous-ensembles

1- Cardinal de l'ensemble  $E \times F$ .

Soit  $E$  un ensemble à  $p$  éléments et  $F$  un ensemble à  $n$  éléments. Alors

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

et

$$\text{Card}(E \times F) = p \times n = np.$$

2- Cardinal de l'ensemble  $F^p$ .

$$F^p = \overbrace{F \times F \times \cdots \times F}^{p \text{ facteurs}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \mid x_1 \in F, x_2 \in F, \dots, x_p \in F\}$$

Alors

$$\text{Card } F^p = n \times n \times \cdots \times n = n^p$$

# Les listes ou suites d'éléments d'un ensemble

Un élément  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $F^p$  est une suite ordonnée de  $p$  éléments de  $F$  appelé un  $p$ -uplet ou une  $p$ -liste d'éléments de  $F$ .

C'est aussi une application de l'ensemble  $E$  à  $p$  éléments vers l'ensemble  $F$  à  $n$  éléments.

## Remarques

- 1) L'ordre est important dans une  $p$ -liste.
- 2) Une  $p$ -liste peut contenir plusieurs fois un même élément.

# Les listes ou suites d'éléments distincts

## Définition 1.1: arrangement

- 1) Une  $p$ -liste à éléments tous distincts est appelé un arrangement de  $p$  éléments pris parmi les  $n$  éléments. C'est aussi une application injective d'un ensemble  $E$  à  $p$  éléments vers un ensemble  $F$  à  $n$  éléments.
- 2) Lorsque  $p = n$ , un arrangement de  $n$  éléments pris dans un ensemble à  $n$  éléments est une permutation des  $n$  éléments. C'est aussi une application bijective de d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $n$  éléments.

# Exemples de listes ou suites d'éléments

## Exemple

- une  $p$ -liste de boules est un tirage successif avec remise de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules.
- un arrangement de  $p$  boules est un tirage successif sans remise de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules.
- une permutation de  $n$  boules est un tirage successif sans remise de  $n$  boules dans une urne contenant  $n$  boules.

# Les parties ou sous-ensemble d'éléments distincts

## Définition 1.2: combinaison

Une partie ou sous-ensemble de  $p$  éléments distincts d'un ensemble à  $n$  éléments est appelé une combinaison de  $p$  éléments pris parmi les  $n$  éléments.

Notons que contrairement à une  $p$ -liste, l'ordre des éléments ne compte pas dans une combinaison et une combinaison ne peut contenir un même élément plus d'une fois.

Un tirage simultané de  $p$  boules dans une urne contenant  $n$  boules est une combinaison des  $p$  boules prises parmi les  $n$  boules.

## Proposition 1.1

Soit  $E$  un ensemble à  $p$  éléments et  $F$  un ensemble à  $n$  éléments.

- ❶ Le nombre de  $p$ -listes d'un ensemble à  $n$  éléments ou nombre d'applications de  $E$  vers  $F$  est égal à  $n^p$ ,
- ❷ Le nombre de  $p$ -listes d'éléments tous distincts ou nombre d'arrangements de  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments ou encore le nombre d'applications injectives de  $E$  vers  $F$  est égal à  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ,
- ❸ Le nombre de  $n$ -listes d'éléments tous distincts ou nombre d'arrangements de  $n$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments ou encore le nombre d'applications bijectives d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments vers un ensemble  $F$  à  $n$  éléments est égal à  $A_n^n = n!$ ,
- ❹ Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments distincts d'un ensemble à  $n$  éléments ou encore le nombre de parties (sous-ensembles) à  $p$  éléments pris dans un ensemble à  $n$  éléments est égal à  $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

## Proposition 1.2

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. On note par  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Alors

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

### Démonstration.

$\mathcal{P}(E)$  est l'ensemble formé de l'ensemble vide, des singletons, des paires, des sous-ensembles à 3 éléments, ..., des sous ensembles à  $p$  éléments, etc., et de  $E$  lui-même. Donc

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$$

On rappelle que  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ .



### Proposition 1.3

- 1- Le nombre de parties ou combinaisons de  $p$  éléments avec répétitions possible d'un ensemble  $F$  à  $n$  éléments est égal à  $\Gamma_n^p$  avec  $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$ .
- 2- Le nombre de suites de  $n$  entiers naturels dont la somme est  $p$  est aussi égal à  $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$  c'-à-d. si  $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = p\}$  alors  $\text{Card}(E) = \Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$ .

#### Démonstration.

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  une combinaison avec répétition (CAR) de  $p$  éléments de  $F$ . Représentons le terme  $x_i$  par 0 autant de fois qu'il se répète puis par 1, pour  $i = 1, 2, \dots, n$  en convenant de ne pas mettre le dernier 1. Alors  $\Gamma_n^p$  est le nombre de façons de choisir  $n - 1$  places de "1" parmi les  $n + p - 1$  places total de 0 et de 1, soit  $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$ . □