

MTH 223/Séance 1

Y. Mensah

08 juin 2020

Dérivée partielle

Definition

Soit la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit (a, b) un point intérieur à D . Les dérivées partielles de f en (a, b) sont définies par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad (1)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \quad (2)$$

sous réserve que ces limites soient finies.

Remarques

- 1 Dans la pratique pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ on fixe y et on dérive par rapport à x et pour celui de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on fixe x et on dérive par rapport à y .
- 2 Pour alléger l'écriture, on écrira souvent $\frac{\partial f}{\partial x}$ au lieu $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Classe $\mathcal{C}^1$ / Différentielle totale

Definition

f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

Definition

La différentielle (totale) de f est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (3)$$

La quantité df représente la variation de f lorsque x varie de dx et y varie de dy .

- 1 Pour chacune des fonctions suivantes calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$f(x, y) = x^2 + y^2, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 4}, f(x, y) = e^{xy} + xy, \\ f(x, y) = \tan(x + y).$$

- 2 Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ pour $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$,
 $f(x, y, z) = \sin(xy + z^2)$.

- 3 A la suite d'une légère déformation le rayon d'un cône passe de 10 cm à 10,05 cm et sa hauteur passe de 5,6 cm à 5,5 cm. Déterminer approximativement la variation ΔV de son volume. (Utiliser la formule $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ lorsque $f = f(x, y)$)

- 4 Déterminer les fonctions $f = f(x, y)$ telles que
 $df = (y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy$.
- 5 Déterminer les fonctions $f = f(x, y, z)$ telles que
 $df = yzdx + xzdy + xydz$.