

CO MPLEXE SCOLAIRE « LA PROMOTION »	DEVOIR SURVEILLE DU PREMIER TRIMESTRE	ANNEE SCOLAIRE : 2021-2 022 CLASSE : 2 ^{nde} CD
PROFESSEUR : AGBO	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	DUREE : 4h / COEF : 4 DATE : 02/11/2020

EXERCICE 1 (5 pts)

1) Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible : (4 × 0,25 pt)

$$A = \frac{\frac{2}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{1} - 1}$$

$$B = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{5}}{4 + \frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5} - \frac{6}{7}}{\frac{5}{7} + \frac{3}{5}}$$

$$C = 1 + \frac{2}{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}}$$

$$D = \frac{4 - \frac{2}{3}}{4}$$

2) Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers: (3 × 0,25pt)

$$E = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} \quad F = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4} \quad G = \frac{35^5}{21^4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

3) Ecrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivant :

$$a = 3,23$$

$$b = 23,812$$

$$c = 1,3445 \quad (1 \text{ pt})$$

4) Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. (0,75 pt)

5) Comparer les nombres réels suivant :

$$a) \sqrt{5} - \sqrt{3} \text{ et } \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$b) 7 - 3\sqrt{5} \text{ et } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$c) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ et } 2; \quad x \text{ et } y \text{ sont deux nombres réels strictement positifs.} \quad (0,5 \text{ pt})$$

EXERCICE 2 (5 pts)

PARTIE A

1) Soit ABC un triangle, λ un nombre réel non nul. A' , B' et C' sont trois points du plan tels que : $\overrightarrow{BA'} = \lambda \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = \lambda \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité. (1,5 pt)

2)a) Soit ABC un triangle, construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)

b) Démontrer que (BC) et (MN) sont parallèles. (0,5 pt)

c) Soient S et T les milieux respectifs de $[BC]$ et $[MN]$. Construire S et T puis démontrer que les points A , S et T sont alignés. (1 pt)

PARTIE B

Développer et réduire :

$$\vec{U} = 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$\vec{V} = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(3\vec{w} + 2\vec{v}) \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$\vec{W} = \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v}) \quad (0,5 \text{ pt})$$

EXERCICE 3 (4 pts)

L'unité de mesure est le cm . On considère le triangle ABC tel que $AB = 5$; $AC = 6$; $BC = 3$. Soit le point G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1) En introduisant le point A dans l'égalité vectorielle caractérisant G , Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. Placer le point G sur la figure. (1 pt)

2) Montrer que pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$. (1pt)

3) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = 6 \quad (1 \text{ pt})$$

EXERCICE 4 (6 pts)**Partie A**

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs, tels que $x < y$.

Notons : $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

- 1) Démontrer que : $x < h$ et $a < y$ (1 pt)
- 2) Démontrer que : $g < a$ (0,5 pt)
- 3) Démontrer que : $g^2 = ah$ et en déduire que $h < g$ (0,75 pt)
- 4) Ranger par ordre croissante les nombres : x, y, a, g et h . (0,5 pt)

Partie B

- 1) Soient $-4,1 \leq x \leq -4$ et $-0,9 \leq y \leq -0,8$. Déterminer des encadrements de $x + y$; $x - y$; xy et $\frac{x}{y}$ (1 pt)

- 2) On considère un sous ensemble C définie par $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } E\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 2 \right\}$ où $E(x)$ est la partie entière de x .

- a) Démontrer que $x \in C \Rightarrow 6 \leq x - 3 < 9$ (1 pt)
- b) Déterminer C (1 pt)
- c) Donner un majorant et un minorant de C . (0,75 pt)

« Fais bien tout ce que tu fais »

Correction du devoir du premier trimestreExercice 1

1-) Calcul des nombres suivants

$$A = \frac{\frac{2}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1}$$

$$= \frac{26}{25} - 4$$

$$A = \frac{-74}{25}$$

$$B = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{5}}{4 + \frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5} - \frac{6}{7}}{\frac{7}{5} + \frac{3}{7}}$$

$$= \frac{1}{4} \div \left(-\frac{1}{32}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{32}{1}$$

$$B = -8$$

$$C = 1 + \frac{2}{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}}$$

$$= 1 + \frac{40}{31}$$

$$C = \frac{71}{31}$$

$$D = \frac{4 - \frac{2}{3}}{4}$$

$$D = \frac{5}{6}$$

2-) Ecrivons les nombres à l'aide de puissance entière

$$E = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4}$$

$$= \frac{3^{12} \times 2^{-9}}{3^{-8} \times 2^8}$$

$$E = 2^{-17} \times 3^{20}$$

$$F = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}$$

$$= \frac{3^2 \times 5^{-2} \times 2^{10} \times 3^5 \times 2^3 \times 3^9}{3^4 \times 5^3 \times 2^6 \times 5^{-3} \times 2^4 \times 5^{-4}}$$

$$= \frac{2^{13} \times 3^{16} \times 5^{-2}}{2^{10} \times 3^4 \times 5^{-4}}$$

$$F = 2^3 \times 3^{12} \times 5^2$$

$$G = \frac{35^5}{21^4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$= \frac{5^5 \times 7^5 \times 4^8 \times 3^7}{3^4 \times 7^4 \times 3^8 \times 4^7}$$

$$G = 2^2 \times 3^{-5} \times 5^5 \times 7$$

3-) Sous forme de fraction irréductible.

$$a = 3,2\overline{3}$$

$$100a = 323,2\overline{3}$$

$$\begin{array}{r} 100a = 323,2\overline{3} \\ a = 3,2\overline{3} \\ \hline 99a = 320 \end{array}$$

$$a = \frac{320}{99}$$

$$b = 23,812$$

$$1000b = 23812,812$$

$$\underline{b = 23,812}$$

$$999b = 23789$$

$$b = \frac{23789}{999}$$

$$c = 1,3445$$

$$100c = 134,45$$

$$10000c = 13445,45$$

$$\underline{100c = 134,45}$$

$$9900c = 13311$$

$$c = \frac{1479}{1100}$$

4) Démonstration

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors il existe deux nombres $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a}{b}$ irréductible

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

a^2 est paire donc a est paire
il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2a'$

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2b^2 = (2a')^2$$

$$b^2 = 2a'^2$$

b^2 est paire donc b est paire
il existe $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2b'$

$$\text{On a : } \sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2a'}{2b'} = \frac{a'}{b'}$$

Ce qui est absurde car $\frac{a}{b}$ est irréductible donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

5) Comparaison

a-) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Posons $A = \sqrt{5}-\sqrt{3}$ et

$$B = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$A-B = \sqrt{5}-\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})-2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-3-2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 0$$

$$A-B=0 \Rightarrow A=B$$

c-à-d

$$\underline{\underline{\sqrt{5}-\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}}$$

b-) $7-3\sqrt{5}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Posons $A = 7-3\sqrt{5}$ et $B = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$A-B = 7-3\sqrt{5} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{11-5\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$A-B < 0 \Rightarrow A < B$$

c-à-d $\underline{\underline{7-3\sqrt{5} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}}}$

$$c) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ et } 2$$

$$\text{Posons } A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ et } B = 2$$

$$A - B = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{xy} - 2$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{xy}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x-y)^2 \geq 0 \text{ et } xy > 0$$

$$A - B \geq 0 \Rightarrow A \geq B$$

$$c\text{-à-d } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Exercice 2

Partie A

$$1) \vec{BA'} = \lambda \vec{BC}; \vec{CB'} = \lambda \vec{CA}$$

$$\text{et } \vec{AC'} = \lambda \vec{AB}$$

Soit G le centre de gravité de ABC et G' celui de $A'B'C'$

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$$

$$\text{et } \vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{C'G'} = \vec{0}$$

$$\vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{C'G'} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{CG} + \vec{GG'} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} + \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} + \vec{A'B} + \vec{BG} + \vec{B'C} + \vec{CG} + \vec{CA} + \vec{CG} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} + \vec{A'B} + \vec{B'C} + \vec{CA} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} - \lambda \vec{BC} - \lambda \vec{CA} - \lambda \vec{AB} = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} - \lambda (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

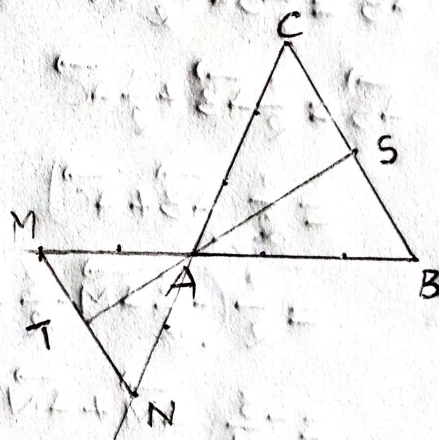
$$3\vec{GG'} - \lambda (\vec{BA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$3\vec{GG'} = \vec{0}$$

$$\vec{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G = G'$$

Donc ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité

$$2-a) \vec{AM} = -\frac{2}{3}\vec{AB}, \vec{AN} = -\frac{2}{3}\vec{AC}$$



b) Démontrons $(BC) \parallel (MN)$

$$\vec{AM} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{AN} + \vec{NM} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{NM} = -\frac{2}{3}\vec{AB} - \vec{AN}$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$= \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Donc (BC) et (MN) sont parallèles.

c) Montrons A, S et T sont alignés

S milieu de [BC]

$$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

T milieu de [MN]

$$\overrightarrow{MT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$$= -\frac{3}{4}(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TN})$$

$$\overrightarrow{AS} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AT}$$

Donc A, S et T sont alignés

Partie B

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u} \\ &= 8\vec{u} - 4\vec{v} - 12\vec{u} + 4\vec{v} + 3\vec{u}\end{aligned}$$

$$\vec{U} = -\vec{u}$$

$$\begin{aligned}\vec{V} &= 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(3\vec{w} + 2\vec{v}) \\ &= 2\vec{u} - 15\vec{v} + 3\vec{u} + 12\vec{w} + 8\vec{v}\end{aligned}$$

$$\vec{V} = 5\vec{u} - 7\vec{v} + 12\vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{W} &= \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v}) \\ &= \vec{u} + 6\vec{v} + 2\vec{w} - 10\vec{u} - 15\vec{v}\end{aligned}$$

$$\vec{W} = -9\vec{u} - 9\vec{v} + 2\vec{w}$$

Exercice 3

$$AB = 5; AC = 6; BC = 3$$

1) Montrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}}$$

2) Montrons.

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} &= 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} \\ &\quad + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GC}\end{aligned}$$

$$= 2\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}$$

Donc

$$\underline{\underline{2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}}}$$

3) Determinons (E)

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = 6$$

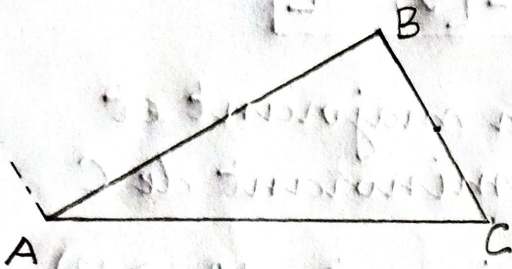
D'après 2) on a :

$$\|2\vec{MG}\| = 6$$

$$2MG = 6$$

$$MG = 3$$

(E) est un cercle de centre G
et de rayon $r = 3$



Exercice 4

Partie A

$$0 < x < y$$

$$a = \frac{x+y}{2} \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

1-) Montrons que $x < h$ et
 $a < y$

$$* x < h$$

$$\begin{aligned} x - h &= x - \frac{2}{\frac{x+y}{x \cdot y}} \\ &= x - \frac{2xy}{x+y} \\ &= \frac{x^2 + xy - 2xy}{x+y} \\ &= \frac{x(x-y)}{x+y} \end{aligned}$$

$$\text{or } x < y \Rightarrow x - y < 0$$

$$\text{donc } x - h < 0$$

$$\text{D'où } \boxed{x < h}$$

$$* a < y$$

$$a - y = \frac{x+y}{2} - y$$

$$= \frac{x-y}{2} < 0$$

$$a - y < 0 \text{ donc } \underline{a < y}$$

2-) Montrons que $g < a$

$$g^2 = xy \text{ et } a^2 = \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$g^2 - a^2 = xy - \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4}$$

$$= \frac{-x^2 - y^2 + 2xy}{4}$$

$$= \frac{-(x-y)^2}{4} < 0$$

$$g^2 - a^2 < 0$$

$$g^2 < a^2$$

$$\text{Donc } \underline{g < a}$$

3-) Démonstration $g^2 = ah$

$$g^2 = xy$$

$$\begin{aligned} ah &= \frac{x+y}{2} \cdot \frac{2xy}{x+y} \\ &= xy \end{aligned}$$

$$\text{donc } \underline{g^2 = ah}$$

* Déduisons que $h < g$

on sait que $g < a$

$$g^2 < ag$$

$$\text{or } g^2 = ah$$

on a : $ah < ag$

0,25 Donc $h < g$

d-) Par ordre croissante

$$x < h; a < y; g < a, h < g$$

alors on a :

0,5 $x < h < g < a < y$

Partie B

1-) $-4,1 \leq x \leq -4$ et $-0,9 \leq y \leq -0,8$

Encadrement :

* $x+y$

0,25 $-5 \leq x+y \leq -4,8$

* $x-y$

0,25 $-3,3 \leq x-y \leq -3,1$

* xy

0,5 $3,2 \leq xy \leq 3,69$

* $\frac{x}{y}$

0,5 $4,44 \leq \frac{x}{y} \leq 5,13$

2-) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid E(\frac{x}{3}-1) = 2\}$

a-) Démonstration

$$E(\frac{x}{3}-1) \leq \frac{x}{3}-1 \leq E(\frac{x}{3}-1)+1$$

$$2 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 3$$

En multipliant par 3

on a :

$6 \leq x-3 \leq 9$

b-) Determinons :

$$6 \leq x-3 \leq 9$$

$$6+3 \leq x \leq 9+3$$

$$9 \leq x \leq 12$$

$C = [9; 12[$

c-) Un majorant et un minorant de C

* Majorant : 12 (> 12)

* Minorant : 8 (≤ 9)