

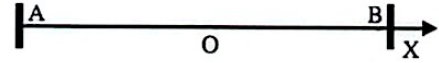
Examen Final : Ondes & Vibrations

Date de l'examen : Mercredi 15 janvier 2025 à 10h00

Durée de l'examen : 1 heure et 30 minutes

EXERCICE 1 (05 pts)

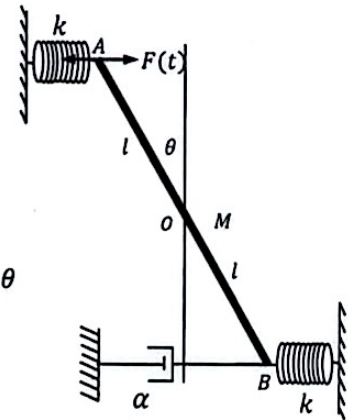
Soit une corde de masse linéique $\mu = 10^{-3} \text{ kg/m}$ tendue entre deux points A et B avec une force $T = 10 \text{ N}$. On crée au point O ($x = 0$) une onde sinusoïdale de la forme $S(0, t) = S_0 \cos(\omega t)$.



1. Écrire les ondes progressive et régressive qui se propagent suivant X . Le vecteur d'onde sera noté k .
2. Calculer la vitesse de propagation V de ces ondes.
3. La réflexion des ondes progressive et régressive aux points A et B donne naissance à une nouvelle onde. Quelle est la nature de cette onde ?

EXERCICE 2 (08 pts)

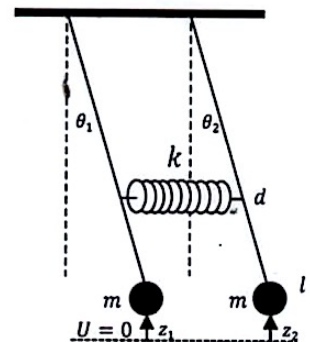
Soit le système ci-contre constitué d'une tige de masse $M = 0.5 \text{ kg}$ et de longueur $2l = 2 \text{ m}$. La tige vibre autour d'un axe Δ , perpendiculaire à la tige et passant par O , grâce à deux ressorts (même constante de raideur $k = \frac{1}{3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$) attachés à ses extrémités (A et B) reliés eux-mêmes à des bâtis. À l'équilibre la tige était verticale et les ressorts non déformés. Le mouvement d'oscillation de faibles amplitudes de cette tige est entretenu par une force $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ et amorti par un amortisseur de coefficient $\alpha = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$.



1. Déterminer l'énergie cinétique T et potentielle U du système en fonction de θ et $\dot{\theta}$ respectivement. On donne le moment d'inertie de la tige $I_{/\Delta} = \frac{1}{12} M(2l)^2$.
2. Dédire le lagrangien L du système.
3. Déterminer la fonction de dissipation D du système.
4. Écrire l'équation différentielle de lagrange du système et déduire son équation différentielle de mouvement. Mettre l'équation différentielle de mouvement sous la forme $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 \cos(\omega t)$ en précisant λ , ω_0 et A_0 .
5. Calculer les constantes λ , ω_0 et A_0 . On donne $F_0 = 5 \text{ N}$. Que représente λ et ω_0 .
6. En régime permanent l'amplitude des vibrations s'écrit $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Donner les expressions des constantes d'intégration θ_0 et φ . Calculer θ_0 et φ pour $\omega = 5 \text{ rad/s}$.

EXERCICE 3 (07 pts)

Deux pendules identiques de masses $m = 0.5 \text{ kg}$ et de longueur $l = 1 \text{ m}$ sont reliés par un ressort de raideur $k = 4 \text{ N/m}$ attaché à une distance $d = 0.5 \text{ m}$ des points d'attache des pendules. À l'équilibre les pendules sont verticaux et le ressort non déformé. Le système oscille avec des oscillations de faibles amplitudes et les positions des pendules sont déterminées par les coordonnées généralisées θ_1 et θ_2 (voir figure ci-contre).



1. Montrer que le lagrangien du système s'écrit :
$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} (mgl + kd^2) \theta_1^2 - \frac{1}{2} (mgl + kd^2) \theta_2^2 + kd^2 \theta_1 \theta_2$$
2. Écrire les équations différentielles de lagrange du système
3. Dédire les équations différentielles de mouvement du système.
4. En supposant des solutions de la forme $\theta_1 = A_1 e^{i\omega t}$ et $\theta_2 = A_2 e^{i\omega t}$, calculer les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$. On donne $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Corrigé Examen Final Ondes et Vibrations

Exercice 1: (05 pts)

1) Onde progressive : $S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$ (01)

Onde régressive : $S(x,t) = S_0 \cos(\omega t + kx)$ (01)

2) $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ (01) $V = \sqrt{\frac{10}{10^{-3}}} = \sqrt{10^4} = 100 \text{ m/s}$ (01)

3) L'onde résultante est stationnaire (01)

Exercice 2: (08 pts)

1) $T = \frac{1}{2} T_{\Delta} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \pi (2l)^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi l^2}{3} \right) \dot{\theta}^2$ (0.5)

$U = \frac{1}{2} k (l\theta)^2 + \frac{1}{2} k (l\theta)^2 = \frac{1}{2} (2kl^2) \theta^2$ (0.5)

2) $L = T - U$ (0.5) $= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi l^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (2kl^2) \theta^2$ (0.5)

3) $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \alpha (l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (\alpha l^2) \dot{\theta}^2$ (0.5)

4) Le système : 1 d.d.l (0.5) forcé (0.25) amorti (0.25)

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \theta} (F)$ (0.5)

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{\pi} \dot{\theta} + \frac{6k}{\pi} \theta = \frac{3F_0}{\pi l} \cos(\omega t)$ (0.5)

forme: $\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3\alpha}{2\pi} \quad (0.25) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{6k}{\pi}} \quad (0.25) \quad A_0 = \frac{3F_0}{\pi k} \quad (0.25)$$

$$c) \lambda = 3 \text{ s}^{-1} \quad (0.25) \quad \omega_0 = 2 \text{ s}^{-1} \quad (0.25) \quad A_0 = 30 \quad (0.25)$$

$$b) Q_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \quad (0.5) \quad Q_0 = 0.82 \text{ rad} \quad (0.5)$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (0.5) \quad \varphi = 0.96 \text{ rad} \quad (0.5)$$

Exercice 3: (07 pts)

$$1) T = \frac{1}{2}(m l^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m l^2) \dot{\theta}_2^2 \quad (0.5)$$

$$U = m g z_1 + m g z_2 + \frac{1}{2} k (d\theta_2 - d\theta_1)^2 \quad (0.25)$$

$$U = m g l \frac{\theta_1^2}{2} + m g l \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2} k d^2 (\theta_2^2 + \theta_1^2 - 2\theta_2\theta_1) \quad (0.25)$$

$$U = \frac{1}{2} (m g l + k d^2) \theta_1^2 + \frac{1}{2} (m g l + k d^2) \theta_2^2 - k d^2 \theta_1 \theta_2 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow L = T - U \quad (0.5)$$

$$L = \frac{1}{2}(m l^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m l^2) \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(m g l + k d^2) \theta_1^2 - \frac{1}{2}(m g l + k d^2) \theta_2^2 + k d^2 \theta_1 \theta_2$$

2) système: 2 d.d.f. (0.25) libre (0.25) non-amorti (0.25)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 & (0.25) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 & (0.25) \end{cases}$$

{ 02

$$3) \begin{cases} m l^2 \ddot{\theta}_1 + (m g l + k d^2) \theta_1 - k d^2 \theta_2 = 0 \\ m l^2 \ddot{\theta}_2 + (m g l + k d^2) \theta_2 - k d^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

4) En remplaçant θ_1 et θ_2 dans le système obtenu:

$$\begin{bmatrix} [-m l^2 \omega^2 + (m g l + k d^2)] & -k d^2 \\ -k d^2 & [-m l^2 \omega^2 + (m g l + k d^2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système possède des solutions si:

$$\begin{vmatrix} [-m l^2 \omega^2 + (m g l + k d^2)] & -k d^2 \\ -k d^2 & [-m l^2 \omega^2 + (m g l + k d^2)] \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [-m l^2 \omega^2 + (m g l + k d^2)]^2 - [k d^2]^2 = 0$$

On obtient une équation algébrique d'ordre 4 qui donne 4 solutions. Deux solutions sont négatives et sont donc refusées. Les deux solutions restantes sont:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_1 = 3.13 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \left(\frac{d}{l}\right)^2}$$

$$\omega_2 = 3.72 \text{ s}^{-1}$$