

TRAVAUX DIRIGÉS : GÉOMÉTRIE AFFINE

Introduction aux espaces vectoriels

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Considérons les ensembles suivants : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, pour un entier n $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites réelles.

Tous ces ensembles sont de nature très différente. Pourtant tous ces ensembles ont en commun d'avoir des lois de compositions (des opérations) qui ont les mêmes propriétés. Il s'agit de la loi "+" et la loi ".".

Par exemple, considérons l'ensemble $E([0; 1]; \mathbb{R})$ des applications de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On peut définir une première loi, notée "+", de la façon suivante :

$$\forall (f; g) \in E([0; 1]; \mathbb{R})^2; f + g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) + g(x).$$

À deux éléments f et g de $E([0; 1]; \mathbb{R})$, on associe un élément $f + g$, qui est encore dans $E([0; 1]; \mathbb{R})$. On dit que "+" est une loi de composition interne.

Considérons une autre loi, définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E([0; 1]; \mathbb{R}); \lambda.f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \lambda f(x).$$

À un scalaire λ , et à un élément f de $E([0; 1]; \mathbb{R})$, on associe $\lambda.f$ qui est un élément de $E([0; 1]; \mathbb{R})$. On dit que cette loi, notée ".", appelée la multiplication par un scalaire, est une loi de composition externe.

Quand on considère l'ensemble $E([0; 1]; \mathbb{R})$, et que l'on veut travailler uniquement avec les deux opérations mentionnées ci-dessus, on dit que l'on considère l'ensemble $E([0; 1]; \mathbb{R})$ muni des deux lois "+" et ".", et on note $(E([0; 1]; \mathbb{R}); +; \cdot)$.

On peut faire de même avec tous les ensembles cités et comme ces lois vérifient les mêmes propriétés (associativité de la loi "+", existence d'un 0, existence d'un opposé, distributivité de la loi "." sur la loi "+", etc) elles munissent ces ensembles d'une même structure, la structure d'espace vectoriel. C'est à dire que tous ces ensembles vont avoir des propriétés communes.

Définition : Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne, notée "+", et d'une loi de composition externe, notée ".".

On dit que E est un K -espace vectoriel si l'on dispose des propriétés suivantes :

1. Propriétés de "+"

- La loi + est associative.
- Il existe un élément neutre pour +, noté 0_E . Ainsi : $\forall x \in E; 0_E + x = x + 0_E = x$.
- Tout élément de E admet un opposé pour la loi + : pour tout $\forall x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x + y = y + x = 0_E$. On note $y = -x$.
- La loi + est commutative.

2. Propriétés de "."

- $\forall x \in E; 1.x = x$.
- $\forall \lambda \in K; \forall (x; y) \in E^2; (x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- $\forall (\lambda; \mu) \in K^2; \forall x \in E; (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
- $\forall (\lambda; \mu) \in K^2; \forall x \in E; \lambda(\mu x) = (\lambda \mu).x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de K sont appelés scalaires.

Un espace vectoriel n'est jamais vide, puisqu'il contient toujours l'élément neutre pour "+".

En pratique, il arrive souvent que l'on note cet élément 0, au lieu de 0_E .

Exercice 1 Montrer que l'ensemble $E([0; 1]; \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2 Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?

$E_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a \leq b\}$, $E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + 3c = b\}$, $E_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a^2 + c^2 = b\}$,
 $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 3\}$, $E_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(3) = 0\}$ où $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 1

Espaces affines

1.1 Généralités

1.1.1 Espace affine associé à un espace vectoriel

Considérons un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés des "points", et un espace vectoriel réel E . Soit une application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$. On convient de noter $\overrightarrow{AB}$ l'image par φ du couple (A, B) de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

Définition 1.1 On dit que $\mathcal{E}$ muni de l'application φ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $\varphi_A : \mathcal{E} \rightarrow E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est une bijection.
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles)

Un espace affine est donc la donnée d'un triplet $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ possédant les propriétés énoncées ci-dessus. On dit aussi que $\mathcal{E}$ est muni d'une **structure affine**. On pourra dire plus simplement que $\mathcal{E}$ est un espace affine.

L'espace vectoriel E est appelé la **direction** de $\mathcal{E}$ et sa **dimension** est par définition la dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Exemples

1. On prend $\mathcal{E}$ comme l'ensemble de tous les points de l'espace ambiant représenté par $\mathbb{R}^3$ et $E = \mathcal{V}$, ensemble de tous les vecteurs de l'espace. Il est évident que l'application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$, $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ vérifie les propriétés 1. et 2. de la définition. $\mathcal{E}$ est donc muni d'une structure d'espace affine. On a $\mathcal{V} = \text{direction de } \mathcal{E}$ et $\dim(\mathcal{E}) = 3$.
2. Soit E un espace vectoriel quelconque. On définit une structure affine sur E en considérant ses vecteurs comme des points et en définissant $\varphi : E \times E \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto \overrightarrow{ab} = b - a$. En effet pour tout vecteur a fixé dans E , l'application $m \mapsto \overrightarrow{am} = m - a$ est une bijection de E sur lui-même. De plus, la relation de Chasles est vérifiée : $(c - a) + (b - c) = b - a$. En conséquence, E est un espace affine de direction E .

Remarque

Pour deux points donnés dans $\mathcal{E}$, $\varphi_B(M) = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \varphi_A(M)$.

Propriété 1.1 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

1. Pour tout point A de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
2. Pour tous points A, B de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Preuve : En exercice

Propriété 1.2 (Règle du parallélogramme)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et A, B, A', B' des points de $\mathcal{E}$.

Les relations $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes.

Tout quadrilatère vérifiant l'une de ces relations est un parallélogramme.

Définition 1.2 Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont dits quipollents si les points A, B, A' et B' vrifient l'une ou l'autre des relations de la rgle du parallélogramme.

On note $\approx$ la relation d'quipollence dans l'ensemble des bipoints de $\mathcal{E}$

$$(A, B) \approx (A', B') \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Propriété 1.3 La relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints de $\mathcal{E}$

Démonstration en exercice.

Une classe d'équivalence de la relation $\approx$ est l'ensemble des bipoints de $\mathcal{E}$ auxquels l'application φ associe un vecteur donné de E . On peut alors identifier chaque vecteur de E à une classe d'équivalence de la relation d'équipollence.

Convention :

Pour tous points A, B de $\mathcal{E}$ et pour tout vecteur $\vec{v}$ de E , on convient qu'on peut noter (à titre facultatif) :

$$B = A + \vec{v} \quad \text{au lieu de} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{v}$$

Dans cette notation, le signe $+$ ne doit pas être confondue avec le signe de l'addition des vecteurs ; mais il doit être simplement compris comme le symbole de la loi externe définie de $\mathcal{E} \times E$ dans $\mathcal{E}$ et qui associe au couple $(A, \vec{v})$, le point B défini par la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Avec cette notation, on vérifie aisément que :

1. $A = B + \vec{v} \Leftrightarrow B = A + (-\vec{v})$
2. $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$

Exercices :

1. Justifier les relations 1. et 2. ci-dessus.
2. Exprimer les propriétés des espaces affines l'aide de la notation donne ci-dessus.
3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 1$ et E l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$.
 - (a) Vérifiez que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - (b) On définit Φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\Phi((x, y, z), (x', y', z')) = (x' - x, y' - y, z' - z)$. Montrez que $\Phi(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$ est inclus dans E et que Φ définit sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent (associé) est E .

1.1.2 Sous-espace affine d'un espace affine

Définition 1.3 Soit $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ un espace affine et $\mathcal{E}'$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}'$ est un sous-espace affine (ou variété affine) de $\mathcal{E}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $E' = \varphi(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}')$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $\mathcal{E}'$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E'

E' est la **direction** de $\mathcal{E}'$ et ses éléments sont des **vecteurs directeurs** de $\mathcal{E}'$. La **dimension** de $\mathcal{E}'$ est égale à celle de E' . On considère que l'ensemble vide est un espace affine de dimension indéfini.

Exemple Soit A un point quelconque d'un espace affine $\mathcal{E}$. On pose $\mathcal{E}' = \{A\}$. Alors on a $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}' = \{(A, A)\}$ et puisque $\varphi(A, A) = \vec{0}$, on obtient $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}' = \{\vec{0}\}$. La restriction φ' de φ à $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ est une application qui vérifie de façon évidente les deux propriétés de la définition. $\mathcal{E}' = \{A\}$ est donc un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension zéro.

Théorème 1.1 Soit $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ un espace affine. Soit A un point de $\mathcal{E}$ et E' un sous-espace vectoriel de E .

L'ensemble $\mathcal{E}'$ des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\varphi(A, M)$ appartienne à E' est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E' , noté $\mathcal{V}(A, E')$.

Démonstration.

- $\varphi(A, A) = \vec{0} \in E$. Donc le point A appartient à $\mathcal{E}$ qui, de ce fait, n'est pas vide.
- Montrons que $\varphi(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}') = E'$.

Soit (M, N) un élément quelconque de $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$. $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \in E'$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ appartiennent à E' . Donc $\varphi(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}') \subset E'$.

Réciproquement $\forall \vec{u} \in E', \exists! M \in \mathcal{E} / \varphi_A(M) = \vec{u}$. Un tel point M appartient à $\mathcal{E}'$, par définition. Alors $\vec{u} = \varphi(A, M) \in \varphi(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}')$ d'où $E' \subset \varphi(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}')$.

- Montrons que la restriction φ' de φ à $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ vérifie les deux propriétés de la définition 1.1. La relation de Chasles, vraie pour tout triplet de $\mathcal{E}^3$, est vraie en particulier pour tout triplet de $\mathcal{E}'^3$.

Soit $(\vec{u}, M) \in E' \times \mathcal{E}'$. On sait qu'il existe un unique point N de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$. Montrons que ce point N appartient à $\mathcal{E}'$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \vec{u}$ d'où $\overrightarrow{AN} \in E'$. Le point N est donc un élément de $\mathcal{E}'$

Théorème 1.2 Soient $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ un espace affine, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux sous-espaces affines non vides de $\mathcal{E}$ de directions respectives E' et E'' .

L'intersection $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si ce sous-espace affine est non vide, sa direction est $E' \cap E''$.

Démonstration

- Si $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \emptyset$, c'est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$
- Si $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' \neq \emptyset$, il existe au moins un point A commun à $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$. Alors l'on a $\mathcal{E}' = \mathcal{V}(A, E')$ et $\mathcal{E}'' = \mathcal{V}(A, E'')$. Et pour tout point M de $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$,

$$M \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}(A, E') \text{ et } M \in \mathcal{V}(A, E'') \Leftrightarrow M \in \overrightarrow{AM} \in E' \text{ et } M \in \overrightarrow{AM} \in E'' \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in E \cap E' \Leftrightarrow M \in \mathcal{V}(A, E' \cap E'')$$

$\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$ est donc le sous-espace affine passant par A et de direction $E' \cap E''$

Définition 1.4 Deux sous-espaces affines non vides d'un même espace affine sont dits **parallèles** s'ils ont la même direction.

1.2 Translation

Théorème et définition 1.1 Soit $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ un espace affine et $\vec{v}$ un vecteur de E . L'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ définit une application bijective de l'espace affine, $t_{\vec{v}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $M \mapsto M'$, appelée translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\vec{v}$.

Preuve :

Montrons que l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ définit une application $\vec{v}$:

Si l'on se donne le point M et le vecteur $\vec{v}$, le point M' est déterminé de manière unique en tant qu'image de M par l'application bijective φ_M de la définition 1.1 (on peut aussi voir que $M' = M + \vec{v}$ est unique)

Montrons que l'application $t_{\vec{v}}$ est injective :

Si $t_{\vec{v}}(M_1) = t_{\vec{v}}(M_2) = M'$ alors on a $\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{M_2M'} = \vec{v}$, ce qui donne, d'après la règle du parallélogramme $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M'M'} = \vec{0}$, d'où $M_1 = M_2$

Montrons que l'application $t_{\vec{v}}$ est surjective :

Pour tout point M' donné dans $\mathcal{E}$, le point M tel que $t_{\vec{v}}(M) = M'$ existe bien. il est déterminé par la relation $\overrightarrow{M'M} = -\vec{v}$

Théorème 1.3 Soit $(\mathcal{E}, E, \varphi)$ un espace affine. L'ensemble T des translations de $\mathcal{E}$, muni de la composition de applications est un groupe isomorphe au groupe additif de l'espace vectoriel E par l'application $\vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}$.

Preuve :

- La composition des applications est une loi interne sur T car $\forall \vec{v}, \vec{v'} \in \mathcal{E}$, $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{v'}} = t_{\vec{v} + \vec{v'}} \in T$
- La composition des applications admet un élément neutre dans T car l'application identique de $\mathcal{E}$, élément neutre de la loi de composition $\circ$, n'est autre que la translation de vecteur nul. ($t_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{E}}$).
- Toute translation $t_{\vec{v}}$ admet $t_{-\vec{v}}$ comme symétrique.
- Comme l'addition des vecteurs est commutative, $(T, \circ)$ est un groupe abélien.
- La relation $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{v'}} = t_{\vec{v} + \vec{v'}}$ fait de l'application $\varphi : \vec{v} \mapsto t_{\vec{v}}$ un homomorphisme de groupes. Cet homomorphisme est injectif car son noyau est réduit $\{\vec{0}\}$. En effet :
 $\varphi(\vec{v}) = Id_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{E}, t_{\vec{v}}(M) = M \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

1.3 Repères

Nous considérons ici l'espace affine $\mathbb{R}^3$
 $\mathbb{R}^3$ est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel lorsqu'on le munit de l'addition interne et de la multiplication externe définies respectivement pour tous $(x, y, z), (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ et pour tout réel λ par :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, noté ici E , est muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ses éléments sont des vecteurs et seront, de ce fait, notés par des lettres minuscules surmontées de flèche. Exemple : $\vec{i} = (1, 0, 0)$

L'espace affine $\mathbb{R}^3$ (dont les éléments sont considérés comme des points) sera noté $\mathcal{A}_3$. Ses points seront notés par des lettres majuscules. Exemple : $M = (2, 1, 0)$.

1.3.1 Repère canonique d'origine O

Dans $\mathcal{A}_3$, on note $O = (0, 0, 0)$

Définition 1.5 On appelle repère canonique d'origine O , l'ensemble formé par le point O et la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout point M de $\mathcal{A}_3$, $\overrightarrow{OM} = \varphi(O, M)$ appartient E . Il existe donc des nombres réels x, y, z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x, y, z sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 1.6 Les réels x, y, z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sont appelés "coordonnées de M " dans le repère canonique d'origine O . On écrit $M(x, y, z)$. x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M

1.3.2 Repère quelconque d'origine O

Il est possible d'effectuer un changement de base dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Désignons par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Cette base peut aussi servir former un repère de l'espace affine $\mathcal{A}_3$.

Définition 1.7 On appelle repère de $\mathbb{R}^3$ d'origine O , l'ensemble formé par le point O et une base quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées d'un point M relativement à ce repère sont par définition les coordonnées X, Y, Z du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On écrit alors $M(X, Y, Z)$

Dans E , le passage de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ se fait l'aide d'une matrice carrée $P = (a_{ij})$ appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}'$, définie de telle manière que $\vec{e}_j = a_{1j}\vec{i} + a_{2j}\vec{j} + a_{3j}\vec{k}$, ($1 \leq j \leq 3$). Cela signifie que P est la matrice dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées de $\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Puisque dans chacune de ces deux bases, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont en même temps les coordonnées du point M dans le repère de $\mathcal{A}_3$ correspondant, les formules de changement de base dans E sont aussi des **formules de changement de repère** dans $\mathcal{A}_3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.3.3 Repère quelconque d'origine A

Définition 1.8 Soit A un point donné dans $\mathcal{A}_3$.

On appelle repère d'origine A , l'ensemble formé par le point A et une base quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées d'un point M de $\mathcal{A}_3$ relativement à ce repère sont, par définition, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

1.3.4 Changement de repère

Soient $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ deux repères quelconques de $\mathcal{A}_3$. Si B est de coordonnées x_0, y_0, z_0 dans le repère $\mathcal{R}_1$ et si P est la matrice de passage de la base

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, alors pour tout point M de coordonnées x, y, z dans le repère $\mathcal{R}_1$ et de coordonnées X, Y, Z dans le $\mathcal{R}_2$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

C'est la formule de changement de repère.

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $O = (0, 0, 0)$ et $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère canonique d'origine O . O' tant le point de coordonnées $(2, -1, 3)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une autre base dont les vecteurs sont définis par : $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{j} + 5\vec{k}$

Les formules de changement de repère s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

où (x, y, z) et (X, Y, Z) sont les coordonnées du point M dans les représentation $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ respectivement.

TRAVAUX DIRIGÉS : GÉOMÉTRIE AFFINE

ESPACES AFFINES

Exercice 1 On considère un système linéaire de n équations à n inconnues. Montrer que l'ensemble des solutions de ce système est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

Indication : Pose $S = \{X \in M_1(K) / AX = B\}$ et $S_0 = \{X \in M_1(K) / AX = 0\}$ où S est l'ensemble des solutions du système, S_0 l'ensemble solution du système homogène, X est une solution du système, A matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . Montrer que S_0 est un espace vectoriel et que l'application $\varphi : S \times S \rightarrow S_0, (Y, Z) \mapsto Y - Z$ vérifie les axiomes de la définition des espaces affines.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle ci-dessous :

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace affine associé à un espace vectoriel que l'on précisera.

Exercice 3 Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal n , E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient f et g dans E_1 . Les éléments $f + g$, $f - g$, $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1 , dans E_0 ?
3. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0 .

Exercice 4 Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel X , et T le groupe des translations de E .

1. Montrer que T opère transitivement et simplement sur E par l'application $T \times E \rightarrow E, (t, M) \mapsto t.M = t(M)$.
2. En déduire que le groupe additif des vecteurs de X opère sur E de façon transitive et simple par l'opération $(v, M) \mapsto M' = t_v(M)$, notée $M' = v \dot{+} M$.
3. Réciproquement, soit E un ensemble et X un espace vectoriel dont le groupe additif des vecteurs opère sur E de façon simple et transitive. Montrer que E possède une structure d'espace affine associé à X .

Indication : poser $\overrightarrow{MM'} = \varphi(M, M') = v$, l'unique solution de l'équation $v \dot{+} M = M'$).

Le résultat ainsi démontré peut s'énoncer : Un espace affine est défini par la donnée d'un ensemble E et d'un espace vectoriel X dont le groupe additif des vecteurs opère sur E de façon simplement transitive.

Exercice 5 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que chacune des opérations suivantes lui donnent une structure d'espace affine.

1. $\forall v \in X, \forall M \in X, v \dot{+} M = -v + M$.
2. $\forall v \in X, \forall M \in X, v \dot{+} M = \alpha v + M (\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

Exercice 6 On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. On définit la loi externe $\Phi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U$ qui à un réel t et z dans U associe $\Phi(t, z) = ze^{it}$. Montrer que Φ est transitive et ne définit pas une structure d'espace affine sur U .

Indication : utiliser exercice 4

Exercice 7 Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$. Montrer que pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application $f : A \mapsto A + \vec{u}$ est une bijection de E dans lui-même.

Cette application est appelée translation de vecteur $\vec{u}$.

Exercice 8 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces affines de E , de directions respectives $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$. Soient $A \in E_1$, $B \in E_2$. Alors $E_1 \cap E_2 = \emptyset \iff \overrightarrow{AB} \in \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Exercice 9 On considère l'ensemble E des triplets de $\mathbb{R}^3$ tels que $x - 2y + z = 1$ et l'ensemble H des triplets de $\mathbb{R}^3$ tels que $x - 2y + z = 0$.

1. Vérifier que H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. On définit f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f((x, y, z), (x', y', z')) = (x' - x, y' - y, z' - z)$. Montrer que $f(E \times E)$ est inclus dans H et que f définit sur E une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel associé est H .
3. Montrer que l'ensemble F des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel t vérifiant $x = -3 + t$, $y = -2t$ et $z = 4 - 5t$ est un sous-espace affine de E .

Exercice 10 Soit E un espace affine et $F = A + \vec{F}$ une variété affine de E de direction $\vec{F}$ avec $A \in E$. Montrer que $B \in F \iff B + \vec{F} = F$.

Exercice 11 Dans un espace affine $(E, \vec{E})$ de dimension 2, si $(F, \vec{F})$ et $(G, \vec{G})$ sont deux droites affines non parallèles, alors $F \cap G$ est un singleton.

Exercice 12 E est espace affine de direction $\vec{E}$; F et G , deux variétés affines de E dont les directions vérifient $\vec{F} + \vec{G} = \vec{E}$. Montrer que $F \cap G$ n'est pas vide.

Exercice 13 L'espace affine E est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Écrire explicitement les formules de changement de coordonnées pour le nouveau repère défini par : $M_0(2, 1, 1)$; $\vec{I} = \vec{i} - 3\vec{k}$; $\vec{J} = 3\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{K} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$.

Écrire les formules inverses

Chapitre 2

Barycentre

Dans ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne l'espace affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$. Les définitions, les théorèmes et propriétés énoncés dans ce chapitre restent valables dans tout autre espace affine, notamment dans le plan affine $\mathcal{P}$ engéométrie plane.

2.1 Notion de barycentre

Nous appelons **point pondéré** tout couple (M, α) de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Le nombre réel α est le **coefficient de pondération**. Toute suite finie de points pondérés est appelé **système de points pondérés**.

Définition 2.1 On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ l'application

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{V} \\ M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad (2.1)$$

Nous donnons ci-après quelques propriétés des fonctions vectorielles de Leibniz.

Propriété 2.1 Soit f fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors f est une application constante.
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors f est une application bijective.

Démonstration

Définition 2.2 Soit $\Sigma = ((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. On appelle barycentre du système Sigma l'unique antécédant par f du vecteur nul de E , c'est à dire le point G défini par : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

2.2 Propriétés du barycentre

Propriété 2.2 1. Le barycentre G est indépendant de l'ordre des points $A_1, \dots, A_n$.

2. Le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ n'est pas modifié si l'on multiplie les coefficients α_i par un même nombre réel non nul.

3. On ne change pas le barycentre d'un système de n points quand on remplace p quelconque de ces points ayant une somme de pondération non nulle par leur barycentre pondéré par cette somme.

Démonstration

Définition 2.3 on appelle isobarycentre de n point A_i , le barycentre de ces points affectés de coefficients égaux.

2.3 Construction du barycentre

D'après la propriété 2.2, alinéa 3, toute construction d'un barycentre se ramène à des constructions de barycentres de deux points.

En effet si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ on peut trouver deux points dont la somme des pondérations est non nulle. Supposons $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$

En application de la propriété 2.2, cherchons le barycentre g_1 de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) , puis le barycentre g_2 de $(g_1, \alpha_1 + \alpha_2)$ et (A_3, α_3) , et ainsi de suite jusqu'au barycentre g_{n-1} de $(g_{n-2}, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})$ et (A_n, α_n) qui n'est autre que le point G cherché.

Il suffit donc de décrire la construction du barycentre de deux points pondérés. Nous donnons ci-après quelques méthodes de construction.

Soient (A, α) , (B, β) des points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$, et G leur barycentre. On a

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

1. On a alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$, ce qui permet de construire G comme image de B par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$. Pour ce faire, traçons une droite auxiliaire (Δ) passant par A et muni du repère affine (A_0, H_0) . Sur cette droite, plaçons les points H et H' tels que $\overrightarrow{AH} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{AH_0}$ et $\overrightarrow{AH'} = \beta \overrightarrow{AH_0}$. Le point H' est l'image du point H par l'homothétie h . Le point G est donc à l'intersection de la droite (AB) et de la droite parallèle à (BH) passant par H' .

2. On choisit un point O n'appartenant pas à la droite (AB) . On sait que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad G \in (AB)$$

Soit G' le point de coordonnées (α, β) dans le repère affine (O, A, B) du plan. $\overrightarrow{OG'} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ donc $G \in (OG')$. G est donc le point d'intersection des droites (OG') et (AB) .

3. On suppose $\beta \neq 0$. Alors l'égalité $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donne $\overrightarrow{GB} = -\frac{\alpha}{\beta} \overrightarrow{GA}$, donc G est le centre de l'homothétie de rapport $-\frac{\alpha}{\beta}$ qui applique A sur B

Exemple : Construire le barycentre de $((A, \sqrt{2}), (B, 1))$, et le barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 4)$, A, B, C étant des points quelconques du plan.

2.4 Coordonnées barycentriques

Le barycentre donne un nouveau moyen d'identification d'un point dans un espace affine. En effet un point peut être identifié à une constante près par les coefficients d'un système dont il est le barycentre.

Définition 2.4 Soit (A, B, C) un repère affine du plan $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ (resp. (A, B, C, D) un repère affine de l'espace $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$)

Etant donné un point M du plan (resp. de l'espace), on appelle coordonnées barycentrique de M dans le repère (A, B, C) resp. dans le repère (A, B, C, D) tout triplet (α, β, γ) de réels tels que M soit le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.

On montre que l'imposition de la contrainte supplémentaire consistant à prendre la somme des coefficients égale à 1 permet de déterminer de façon unique les coordonnées barycentriques d'un point.

En effet si un point M de l'espace affine est barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta))$, on a $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD}$ et avec la condition $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, on retrouve $\beta = x_1, \gamma = x_2, \delta = x_3$ si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de M dans le repère (A, B, C, D) . Ainsi, on a :

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - x_1 - x_2 - x_3, x_1, x_2, x_3)$$

Exercices : 1. Soit A, B, C trois points non alignés. Donner un triplet de coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle ABC .

2. Soit (α, β, γ) un triplet de coordonnées barycentriques d'un point M du plan. A quelle condition le point M appartient-il à la droite (AB) ?

2.5 Fonction scalaire de Leibniz

Définition 2.5 On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ l'application

$$g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2 \quad (2.2)$$

Exemple

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$. La fonction scalaire de Leibniz associée au système $((A, 2), (B, 5), (C, -1))$ est l'application $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

Les propriétés des fonctions scalaires de Leibniz seront très utilisées dans la détermination des lignes de niveau et des surfaces de niveau usuelles. On verra dans le paragraphe qui suit, que l'on peut obtenir une écriture réduite de $g(M)$ qui dépend essentiellement de l'existence ou de la non existence d'un barycentre pour le système de points pondérés auquel la fonction g est associée.

2.5.1 Propriétés

Définition 2.6 Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un système de points pondérés et soit respectivement g et f les fonctions scalaire et vectorielle de Leibniz associées. Pour tous point M et N de $\mathcal{E}$, on a

$$g(M) - g(N) = \overrightarrow{MN} \cdot [f(M) + f(N)]$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 g(M) - g(N) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i N A_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i}^2 - \overrightarrow{NA_i}^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i})(\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i}) \\
 &= \overrightarrow{MN} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i}) \\
 &= \overrightarrow{MN} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{NA_i} \right) \\
 &= \overrightarrow{MN} \cdot [f(M) + f(N)]
 \end{aligned}$$

Propriété 2.3 Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un système de points pondérés et soit g la fonction scalaire Leibniz associée.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors le barycentre G du système existe, et pour tout point M de $\mathcal{E}$,
 $g(M) = g(G) + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{MG}$
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors la fonction vectorielle de Leibniz garde une valeur constante $\vec{c}$, et pour un point fixé I de $\mathcal{E}$, on a, tout point M de $\mathcal{E}$, $g(M) = g(I) - 2\vec{c} \cdot \overrightarrow{IM}$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la propriété 2.2.

2.6 Ensembles convexes

Définition 2.7 Un ensemble E de points de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ est dit convexe s'il contient tout segment dont les extrémités appartiennent à E

Exemples : Une droite, un plan, l'intérieur d'un triangle, l'intérieur d'un disque, l'intérieur d'un polygone convexe sont des ensembles convexes.

Remarques : L'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe. Par contre, la réunion de deux ensembles convexes n'est pas nécessairement un ensemble convexe.

Propriété 2.4 Pour qu'un ensemble E soit convexe, il faut et il suffit que le barycentre de tout système de points de E , affectés de coefficients positifs appartienne à E

TRAVAUX DIRIGÉS : GÉOMÉTRIE AFFINE

BARYCENTRE

Exercice 1 Soit (A, B, O) un repère affine du plan affine. Soit M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans ce repère.

Soit I le milieu de $[BO]$. Soit N le symétrique de M par rapport à I .

Déterminer les coordonnées barycentriques de N dans (A, B, C) .

Exercice 2 A, B, G, D étant quatre points du plan affine distincts deux à deux, on note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BG]$, K celui de $[GD]$, L celui de $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme en utilisant des coordonnées barycentriques.

Exercice 3 Soit A, B, C trois points distincts non alignés du plan, et trois nombres α, β, γ dont la somme est égale 1.

On appelle G le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. G' est le barycentre de $(A, \beta + \gamma), (B, \alpha + \gamma), (C, \alpha + \beta)$, H le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$.

Montrer que les points G, G' et H sont alignés.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace affine, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in E^n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, $\{I, J\}$ une partition de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$,

$G_1 =$ barycentre de $\{(A_i, \alpha_i), i \in I\}$, $G_2 =$ barycentre de $\{(A_j, \alpha_j), j \in J\}$.

1. Ecrire les relations vectorielles définissant G_1 et G_2 et établir

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \overrightarrow{G_1 G_2} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{G_2 A_j} = \vec{0}.$$

2. Montrer que $\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \overrightarrow{G_1 G_2} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_1 A_j}$.

En déduire que si $G_1 \neq G_2$, la direction de $(G_1 G_2)$ ne dépend pas du choix de $\{I, J\}$.

Exercice 5 Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, -1)$.

1. Montrez que (A, B, C) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminez les points P et Q de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
3. Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du point R de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(2, 1)$?
4. Donnez les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du barycentre G de $\{(P, 1), (Q, 2), (R, 5)\}$.

Exercice 6 Soient E un plan affine euclidien et A, B, C un triangle de E .

1. Montrer que O le centre du cercle circonscrit à A, B, C est barycentre de $(A, \sin 2\hat{A}), (B, \sin 2\hat{B}), (C, \sin 2\hat{C})$.
On commencera par montrer que O existe bien!
2. Montrer que H l'orthocentre du triangle A, B, C est le barycentre de $(A, \tan \hat{A}), (B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C})$ (si A, B, C n'est pas rectangle).
On commencera par montrer que H existe bien!
3. Si M est intérieur au triangle A, B, C , montrer que M est le barycentre des points massiques $(A, \text{aire}(MBC)), (B, \text{aire}(MAC))$ et $(C, \text{aire}(AMB))$.

Exercice 7 ABC est un triangle du plan affine (P) et H un point de (P) représenté par un triplet de coordonnées barycentriques $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ par rapport (A, B, C). On suppose $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

1. Soit A_1 le milieu de (B, C) et A' le symétrique de M par rapport A_1 . Déterminer le système de coordonnées barycentriques de A' dans (A, B, C).
2. De même définit-on B' et C'. Montrer que les droites (AA'); (BB') et (CC') sont concourantes en un même point Q.

Montrer que Q est aligné avec M et G, l'isobarycentre de A, B, C.

Chapitre 3

Applications affines

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E et f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

On dit que f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ lorsqu'il existe un endomorphisme φ de l'espace vectoriel E telle que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

L'endomorphisme φ est unique. En effet supposons qu'il existe deux tels endomorphismes φ et φ' . Alors $\forall (M, N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi'(\overrightarrow{MN})$ Et pour tout vecteur $\vec{u}$ de E de représentant $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ on a : $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi'(\vec{u})$ D'où $\varphi = \varphi'$

φ est appelé **l'endomorphisme associé à l'application affine f** .

Exemples

1. Etant donné un point A dans un espace affine $\mathcal{E}$, l'application qui à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point A (application constante) est une application affine dont l'endomorphisme de E associé est l'endomorphisme nul de E .
2. L'application identité de $\mathcal{E}$, $Id_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, M \mapsto M$ est une application affine dont l'endomorphisme de E associé est l'identité de E .
3. Toute translation de vecteur $\vec{u}$ est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'identité de E .

Définition 3.2 Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On appelle couple de points homologues tout couple (M, M') de points de $\mathcal{E}$ tels que $f(M) = M'$

3.1.1 Détermination d'une application affine

Théorème 3.1 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

Toute application affine de $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée de son endomorphisme associé et d'un couple de points homologues.

Ce théorème signifie qu'étant donné un couple (A, A') de points de $\mathcal{E}$ et un endomorphisme φ de E , il existe une et une seule application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est φ et telle que $f(A) = A'$

Preuve :

3.1.2 Image d'un sous-espace affine par une application affine

On rappelle qu'étant donné un point A de $\mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E , $\mathcal{V}(A, F)$ désigne le sous espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction F .

Théorème 3.2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ . Soit A un point de $\mathcal{E}$ et E' un sous-espace vectoriel de E . L'image par f du sous-espace affine $\mathcal{V}(A, E')$ est le sous-espace affine $\mathcal{V}(f(A), \varphi(E'))$.

Preuve :

$\varphi(E')$ est un sous espace vectoriel de E . Soit $A' = f(A) \forall M \in \mathcal{V}(A, E')$, on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{V}(A, E') &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in E' \\ &\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) \in \varphi(E') \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in \varphi(E') \\ &\Leftrightarrow M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E')) \end{aligned}$$

Donc $M \in \mathcal{V}(A, E') \Rightarrow M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E'))$ ce qui signifie $f(\mathcal{V}(A, E')) \subset \mathcal{V}(A', \varphi(E'))$

Réciproquement, soit M' un point de $\mathcal{V}(A', \varphi(E'))$.

$$M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E')) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in \varphi(E') \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in E', \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\vec{u})$$

Or il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et puisque $\vec{u} \in E'$ on a $M \in \mathcal{V}(A, E')$

On a donc

$$\begin{aligned} M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E')) &\Rightarrow \exists M \in \mathcal{V}(A, E'), \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM}) \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{V}(A, E'), \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'f(M)} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{V}(A, E'), M' = f(M) \\ &\Leftrightarrow M' \in f(\mathcal{V}(A, \varphi(E'))) \end{aligned}$$

Donc $M' \in \mathcal{V}(A', \varphi(E')) \Rightarrow M' \in f(\mathcal{V}(A, \varphi(E')))$ et cela signifie que $\mathcal{V}(A', \varphi(E')) \subset f(\mathcal{V}(A, \varphi(E')))$
En définitive, les deux inclusions impliquent $\mathcal{V}(A', \varphi(E')) = f(\mathcal{V}(A, \varphi(E')))$

Conséquences

1. Les images par une application affine de deux sous-espaces affines parallèles sont deux sous-espaces affines parallèles
2. L'image $f(\mathcal{E}')$ par une application affine d'un sous-espace affine $\mathcal{E}'$ de dimension p est un sous espace affine de dimension inférieure ou égale à p . Si f est injective, $\dim(f(\mathcal{E}')) = p$

3.1.3 Applications affines et barycentre

Théorème 3.3 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Soit $\Sigma = ((A_i, \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

L'image par f du barycentre G du système Σ est le barycentre G' du système $\Sigma' = ((f(A_i), \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$

Preuve :

Soit φ l'endomorphisme associé à f . On a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Rightarrow \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \vec{0}$$

3.1.4 Points invariants par une application affine

Théorème 3.4 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel réel E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, d'endomorphisme associé φ .

L'ensemble $\mathcal{I}$ des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{I} \neq \emptyset$, il a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs de E invariants par φ .

Preuve :

$\forall M \in \mathcal{E}, M \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f(M) = M$.

- Si $\mathcal{I} = \emptyset$, alors $\mathcal{I}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$.
- Supposons $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Il existe donc au moins un point A de $\mathcal{I}$.

Alors $\forall M \in \mathcal{I}, \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}$ ce qui veut dire que pour tout point M de $\mathcal{I}$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient au sous-espace vectoriel E' des vecteurs invariant par φ .

$\mathcal{I}$ est donc le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction E' .

3.1.5 Composition des applications affines

Théorème 3.5 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E . Soient $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

La composition des applications affines est une loi de composition interne dans $\mathcal{A}$, et l'application qui à toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, associe son endomorphisme associé est un homomorphisme de $(\mathcal{A}, \circ)$ dans $(\mathcal{L}(E), \circ)$

Preuve :

Soient f et g deux applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphismes associés φ et ψ . Soient M et N deux points quelconques de $\mathcal{E}$, M' et N' leurs images respectives par f et M'' et N'' les images respectives de M' et de N' par g .

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' & \mapsto & M'' \\ N & \mapsto & N' & \mapsto & N'' \end{array}$$

On a : $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{g(M')g(N')} = \psi(\overrightarrow{M'N'}) = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN})) = (\psi \circ \varphi)(\overrightarrow{MN})$

L'application $g \circ f$ est donc une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est $\psi \circ \varphi$

3.2 Exemples d'applications affines

3.2.1 Homothéties-translations

Nous avons déjà étudié les translations. On montre que toute translations est une application affine dont l'endomorphisme associé est l'identité de E (à vérifier)

Définition 3.3 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E . Soit O un point de $\mathcal{E}$ et α un réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport α , l'application notée $h(K, \alpha)$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' de $\mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{OM'} = \alpha \overrightarrow{OM}$

- Propriété 3.1**
1. Toute homothétie est une bijection affine dont l'endomorphisme associé est l'homothétie vectorielle de même rapport, $h_\alpha : \vec{v} \mapsto \alpha \vec{v}$.
 2. Toute homothétie qui n'est pas l'identité admet un seul point invariant, le centre de l'homothétie.
 3. Toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est une homothétie vectorielle de rapport différent de 1 est une homothétie de $\mathcal{E}$.
 4. Soit K un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des homothéties de centre K . $(\mathcal{H}_K, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.
 5. Dans un espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère, étant donné un point $K(x_0, y_0, z_0)$ et un réel non nul α , l'expression analytique de l'homothétie $h(K, \alpha)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x_0 + \alpha(x - x_0) \\ y' = y_0 + \alpha(y - y_0) \\ z' = z_0 + \alpha(z - z_0) \end{cases}$$

3.2.2 Projections

Définition 3.4 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E . On appelle projecteur de $\mathcal{E}$ toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $f \circ f = f$.

Propriété 3.2 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E , et f un projecteur de $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ .

1. φ est un projecteur de E , c'est-à-dire qu'il vérifie : $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
2. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{Mf(M)} \in \text{Ker}\varphi$.
3. L'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\text{Im}\varphi$.
4. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est égal à l'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par f .
5. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\{f(M)\} = f(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(M, \text{Ker}\varphi)$.

A un projecteur de $\mathcal{E}$ sont donc associés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires : $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$, et le sous-espace affine $\text{Im}(f)$ de direction $\text{Im}\varphi$.

Théorème 3.6 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

E' et E'' étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E' , il existe un unique projecteur f d'endomorphisme associé φ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$
2. φ est la projection vectorielle de E' de direction E'' .

NB. La projection vectorielle sur E' de direction E'' est l'application qui à tout vecteur $\vec{u}$ de E qui se décompose $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ avec $\vec{u}' \in E'$, $\vec{u}'' \in E''$, associe le vecteur $\vec{u}'$.

3.2.3 Symétries

Définition 3.5 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

On appelle involution affine de $\mathcal{E}$, toute application affine involutive de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire toute application affine f de $\mathcal{E}$ telle que $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Propriété 3.3 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E , et f une involution affine de $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ

1. φ est un automorphisme involutif de E
2. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{Mf(M)} \in E''$
3. Pour tout point M , le milieu du bipoint $(M, f(M))$ est invariant par f
4. L'ensemble $\mathcal{E}'$ des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E'
5. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{Mf(M)} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$ où p est la projection sur $\mathcal{E}'$ (ensemble des points invariants par f) et de direction E'' .

Le théorème ci-après nous situe sur les conditions d'existence d'une involution affine.

Théorème 3.7 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E' et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E'' .

Il existe une unique involution affine f d'endomorphisme associé φ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f
2. φ est la symétrie vectorielle par rapport à E' de directions E''

Définition 3.6 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E' et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E'' .

On appelle symétrie affine par rapport à $\mathcal{E}'$, de direction E'' , l'unique involution affine qui à tout point M , associe le point M' tel que $p(M)$ soit le milieu du bipoint (M, M')

3.2.4 Affinités

Définition 3.7 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel E .

Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E' , α un réel et p la projection affine sur $\mathcal{E}'$ de direction E'' .

On appelle affinité par rapport à $\mathcal{E}'$ de direction E'' et de rapport α l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' défini par : $\overrightarrow{M'p(M)} = \alpha \overrightarrow{Mp(M)}$

Propriété 3.4 1. f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$

2. Si $\alpha \neq 0$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est égal à $\mathcal{E}'$

TRAVAUX DIRIGÉS : GEOMETRIE AFFINE

APPLICATIONS AFFINES

Exercice 1 Le plan affine est rapporté à un repère cartésien. Déterminer la nature géométrique des applications affines données en coordonnées par les formules :

1. $x' = y$ et $y' = x$
2. $x' = -x - 2y - 2$ et $y' = x + 2y + 1$
3. $x' = -x - 2y + 2$ et $y' = -x + 1$

Exercice 2 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et φ l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui, tout vecteur de coordonnées $(x; y)$ de $\mathcal{V}$ associe le vecteur de coordonnées $(x'; y')$ déterminées par :

$$x' = -3x - 8y \text{ et } y' = 2x + 5y.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire. Est-elle bijective ?
2. Soit O un point de $\mathcal{P}$ et O_1 le point de coordonnées $(-1; 1)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de $\mathcal{P}$. On appelle f l'application affine associée à l'application linéaire φ et telle que $f(O) = O_1$.
 - (a) Montrer que f est bijective
 - (b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit $(x_1; y_1)$ les coordonnées de l'image M_1 de M par f .
Exprimer x_1 et y_1 en fonction de x et y .
Existe-t-il des points M invariant par f ? Si oui, les caractériser par leurs coordonnées.
 - (c) Existe-t-il des droites parallèles à leur image par f ? Si oui les caractériser.
Existe-t-il un point M de $\mathcal{P}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire au vecteur $-2\vec{i} + \vec{j}$?
Montrer qu'il n'existe pas de droite globalement invariante par f .

Exercice 3 Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et les points $J(0;1)$, $O(0;0)$, $Q(2;0)$, $P(2;2)$, $S(1;2)$, $A(-2;2)$ et $B(3;1)$ tels que $f(J)=O$, $f(Q)=P$, $f(S)=A$ et $f(B)=O$.

1. Représenter les points Q , J , S , B .
2. Montrer que f n'est pas une application affine.

Exercice 4

1. Montrer que les projections p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $z=0$ sont des applications affines de la forme $p(x, y, z) = (x + \alpha z, y + \beta z, 0)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les symétries s de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $z=0$ sont les applications affines de la forme $s(x, y, z) = (x + \alpha z, y + \beta z, -z)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. Soit, dans un plan affine E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (D) la droite d'équation $x-y+2=0$ et $\vec{v}$ le vecteur de composantes $(2, 1)$. Exprimer les coordonnées (x', y') du projeté M' d'un point M de E sur la droite (D) dans la direction du vecteur $\vec{v}$ en fonction des coordonnées (x, y) de M .
4. Soit A, B, C trois points distincts et non alignés d'un plan affine et A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[CA]$, C' le milieu de $[AB]$ et G l'isobarycentre de A, B et C .
 - (a) Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') se coupent en G .
 - (b) Montrer qu'il existe une unique application affine f telle que $f(A)=B$, $f(B)=C$ et $f(C)=A$.

(c) Calculer $f(G)$.

Exercice 5 Soient A et B deux points d'un espace affine E et f l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point f(M) défini par

$$\overrightarrow{Mf(M)} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}.$$

1. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ et $\overrightarrow{MN}$ pour tout couple (M,N) de points de E.
2. En déduire que f est affine. Expliciter sa partie linéaire.
3. En déduire la nature géométrique de f. Préciser ses points fixes.

Exercice 6 Dans l'espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-3y+z+1=0$ et $\vec{v}$ le vecteur de composantes (2, 1, -2). On note p la projection sur $\mathcal{P}$ dans la direction du vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P}$ dans la direction de $\vec{v}$.

1. Écrire les coordonnées (x', y', z') du point $M' = p(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.
2. En déduire la matrice P dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la partie linéaire φ de p.
3. Calculer la matrice P^2 . Quel est le rang de P ?
4. Écrire les coordonnées (x'', y'', z'') du point $M'' = s(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.
5. En déduire la matrice S dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la partie linéaire ψ de s. Calculer S^2 .
6. Soit α un réel. On rappelle que l'affinité g de base $\mathcal{P}$, de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{v}$ engendrée par $\vec{v}$ et de rapport α est l'application de E dans E définie par $\overrightarrow{p(M)g(M)} = \alpha \overrightarrow{p(M)M}$ pour tout point M de E.
Écrire, pour tout couple (M,N) de points de E, le vecteur $\overrightarrow{g(M)g(N)}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{p(M)p(N)}$.
7. En déduire que g est affine et exprimer sa partie linéaire a en fonction de φ et de $\text{id}_{\vec{E}}$. Exprimer la matrice A de a en fonction de la matrice P et de la matrice identité.
8. Déterminer un polynôme du second degré annulant A.

Exercice 7 Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine de dimension 1, un plan affine. Soient A, B, C trois points non alignés du plan et trois scalaires α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$. On appelle f l'application qui à un point M de E associe $\text{bary}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)\}$.

1. Montrer que f est affine et que f est une translation ou une homothétie.
2. Écrire la matrice représentant f dans le repère affine A, B, C et en déduire que f est une translation ou une homothétie

Exercice 8 Soient E un plan affine et A, B, C trois points non alignés du plan.

On définit le point C' par le relation : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.

Soit f l'application affine de E dans E définie par : $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C'$.

1. Montrer que f est bijective. Déterminer ses points invariants.
2. Montrer que pour tout point M de E, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. Déterminer les droites globalement invariantes par f.
3. Soit $\vec{u} \in \vec{E}$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ f$ est une application affine ; comparer les parties linéaires de $t_{\vec{u}} \circ f$ et de f. Déterminer l'ensemble des points invariants de $t_{\vec{u}} \circ f$ (on discutera en fonction de $\vec{u}$).
4. (a) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC. Construire f(G).
(b) Soit M un point quelconque du plan. Construire f(M).