

Épreuve de mathématiques

Tous documents interdits.
L'usage de la calculatrice est interdit.
Durée : 3h.

Exercice 1

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On considère une matrice symétrique Σ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$\langle A, B \rangle_\Sigma = \text{trace}({}^t A \Sigma B)$$

(${}^t A$ désigne la transposée de A).

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie, on considère le cas particulier où Σ est la matrice identité I_2 . On notera

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}({}^t A B)$$

I.1 Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, quelle est la valeur de $\langle A, A' \rangle$?

I.2 Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

I.3 On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Donner, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ ainsi qu'une base orthonormée de $\mathcal{T}^\perp$.

I.4 Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

déterminer le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de A à $\mathcal{T}$.

Partie II. Cas général

On suppose dans cette partie que les termes diagonaux de Σ sont strictement positifs, et que le déterminant de Σ est strictement positif.

I.5 Montrer que Σ peut s'écrire sous la forme $\Sigma = {}^t T T$, où T est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

I.6 Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ est un produit scalaire.

I.7 Donner, pour ce produit scalaire, une base orthonormée de $\mathcal{T}$.

I.8 Expliciter cette base orthonormée dans le cas particulier où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\underline{u}_n = \inf\{u_k, k \geq n\} \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$$

II.1 Montrer que les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies, qu'elles sont monotones et qu'elles convergent.

II.2 Montrer que les limites de $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont égales si et seulement si u converge.

On considère maintenant une suite v positive et sous-additive, c'est-à-dire vérifiant, pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, $v_{i+j} \leq v_i + v_j$.

II.3 Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n . Montrer que

$$v_m \leq (q-1)v_n + v_{n+r}.$$

II.4 En déduire l'inégalité

$$\frac{v_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{v_n}{n} + \frac{\max\{v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-1}\}}{m}.$$

II.5 En déduire que la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_m = v_m/m$ est bornée.

II.6 Montrer que la limite de $\overline{u}$ est inférieure à v_n/n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.7 En déduire que la suite $(v_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 3

Partie I. Théorème de Weierstrass

Cette partie propose une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass : si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Dans toute cette partie, on considère une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, n un entier naturel non nul, et x un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

On note S_n une variable aléatoire de loi binômiale $\mathcal{B}(n, x)$, et $B_n(f)(x)$ l'espérance de la variable aléatoire $f(S_n/n)$:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right].$$

Enfin, pour $\alpha > 0$, on note $I(\alpha)$ l'indicatrice de l'événement

$$\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \alpha \right\},$$

c'est-à-dire la variable aléatoire qui prend la valeur 1 sur cet événement et 0 ailleurs.

III.1 Montrer que la fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ est un polynôme, dont on déterminera le degré.

III.2 Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout couple $(a, b) \in [0, 1]^2$ et tout $\varepsilon > 0$, $|a - b| < \alpha(\varepsilon)$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

III.3 Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right) I(\alpha(\varepsilon)) \right] \right| < \varepsilon.$$

III.4 Montrer que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right) (1 - I(\alpha)) \right] \right| \leq 2 \|f\|_\infty \cdot \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \alpha \right].$$

III.5 Déterminer l'espérance et la variance de S_n/n .

III.6 En déduire que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \alpha \right] \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III.7 Conclure en démontrant le théorème de Weierstrass.

Partie II. Un théorème des moments

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k de f sur $[a, b]$ la valeur de l'intégrale

$$M_k(f) = \int_a^b x^k f(x) dx.$$

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$ dont tous les moments sont nuls, c'est-à-dire telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0.$$

III.8 Si P est une fonction polynôme, quelle est la valeur de $\int_a^b P(x) f(x) dx$?

III.9 Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur $[a, b]$ et si f est bornée sur $[a, b]$, alors la suite de fonctions (fg_n) converge uniformément vers fg sur $[a, b]$.

III.10 Montrer que si g et h sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ dont les moments sont tous égaux (c'est-à-dire $M_k(g) = M_k(h)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), alors $g = h$.

La suite de cette partie montre que ce résultat n'est plus vrai dans le cas où on calcule les moments sur un intervalle non-borné. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale complexe

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx.$$

III.11 Montrer que ces intégrales sont bien définies.

III.12 Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .

III.13 En déduire que

$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

III.14 En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x \, dx = 0.$$

III.15 Proposer un exemple de fonction ℓ continue sur $[0, +\infty[$, non nulle, et vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} u^k \ell(u) \, du = 0$.

III.16 Expliquer pourquoi la fonction ℓ proposée à la question précédente ne peut pas être uniformément approchée sur $[0, +\infty[$ par une suite de polynômes.

✗