

Synthèse du Semestre Harmattan
Parcours : Licence ST Mathématiques
UE de MTH222 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
Durée : 2H

Exercice 1(6pts)

Soit E un ensemble.

1. Énoncez les trois axiomes qui définissent une topologie $\mathcal{T}$ sur E .
2. Montrer qu'une partie A d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert si et seulement si elle est voisine de chacun de ses points.
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $(E, \mathcal{T})$. Montrer que $\mathcal{F}$ possède les propriétés suivantes :
 - (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$
 - (b) $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, A \cup B \in \mathcal{F}$
 - (c) $\forall I, \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}^I, \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

Exercice 2(8pts) Soit (E, d) un espace métrique.

1. Montrer que $\forall (x, y, z) \in E^3, |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$
2. Une partie A de E est dite bornée si elle est vide ou si son diamètre $\delta(A)$ est fini. On rappelle que

$$\delta(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y)$$

Montrer que toute partie A de E contenue dans une boule fermée $B_f(b, r)$ est bornée.

3. Réciproquement, montrer que toute partie non vide et bornée de E est contenue dans une boule fermée.