

Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Maths

Examen 2MTH2120 (Théorie des opérateurs)

Durée : 1 heure 30

1. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné. Soit V un sous-espace fermé de H invariant par T . Alors $V^\perp$ est-il invariant par T^* ?
2. Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $\{e_i : i = 1, 2, \dots\}$ une base hilbertienne de H . Soit $T :: H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire. On pose $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$. A-t-on, pour tout $x \in H$, $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \langle x, e_j \rangle \right) e_i$?
3. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné auto-adjoint. Soit y un vecteur fixé de H . On considère l'équation

$$x \in H, Tx = y.$$

Montrer qu'une condition nécessaire pour que cette équation ait une solution est $y \in \ker(T)^\perp$.

4. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné. Par définition le rayon spectral de T est $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. On montre que $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Maintenant, on suppose que T est un opérateur normal.
 - (a) Que signifie " T est normal" ?
 - (b) Montrer que $\forall n \geq 0, \|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$.
 - (c) En déduire que $r(T) = \|T\|$.