

Devoir d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 2H
Documents non autorisés

Exercice 1 (8 points)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On définit $I_\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^n \times (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \mapsto I_\varphi(p, q) := \sum_{i=1}^n q_i \varphi\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

1) Vérifier que I_φ est convexe. En déduire l'inégalité suivante :

$$I_\varphi(p, q) \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \right).$$

2) On définit $\varphi^\circ : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi^\circ(x) := x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) φ° est-elle convexe ?

b) Comment se comparent I_φ et I_{φ° ?

3) Donner les expressions de φ° et I_φ dans les cas suivants : $\varphi(t) = t \ln t$, $\varphi(t) = (1 - \sqrt{t})^2$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - y^2 + 2x^2 - 2z^2 - 2y + 5$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que l'expression $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.

c) En déduire les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{opt } f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2 \\ h_1(x, y, z) = x + y + z = 0, \\ h_2(x, y, z) = x + y - z = 0 \end{cases}$$

Devoir d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 2H
Documents non autorisés

Exercice 1 (8 points)

Soit, $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On définit $I_\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^n \times (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n) \mapsto I_\varphi(p, q) := \sum_{i=1}^n q_i \varphi \left(\frac{p_i}{q_i} \right).$$

1) Vérifier que I_φ est convexe. En déduire l'inégalité suivante :

$$I_\varphi(p, q) \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) \varphi \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \right).$$

2) On définit $\varphi^\circ : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi^\circ(x) := x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) φ° est-elle convexe ?

b) Comment se comparent I_φ et I_{φ° ?

3) Donner les expressions de φ° et I_φ dans les cas suivants : $\varphi(t) = t \ln t$, $\varphi(t) = (1 - \sqrt{t})^2$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - y^2 + 2x^2 - 2z^2 + 2y + 5$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que l'expression $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.

c) En déduire les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{opt } f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2 \\ h_1(x, y, z) = x + y + z = 0, \\ h_2(x, y, z) = x + y - z = 0 \end{cases}$$
