

EXAMEN DE GEOMETRIE RIEMANNIENNE DES SURFACES

MASTER I, année académique 2023-2024

Durée : 3 heures

Exercice I

On nomme surface d'Enneper, la surface paramétrée par :

$$\chi : (u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

1. Déterminer le vecteur unitaire normal en chaque point.
2. Déterminer l'endomorphisme de Weingarten en chaque point
3. Montrer que la surface d'Enneper est à courbure moyenne nulle (minimale)

Exercice II

On considère la surface $\mathcal{S}$ appelée hyperboloïde à une nappe, dont l'équation dans l'espace de coordonnées x, y, z est donnée par $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ peut-être paramétrée par :

$$\chi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$$

2. Déterminer la première forme fondamentale associée à $\mathcal{S}$
3. Déterminer la normale unitaire $N(u, v)$ au point de paramètres $(u, v) \in \mathcal{S}$
4. Calculer les coefficients de la seconde forme fondamentale associée.
5. Calculer la courbure de Gauss G et vérifier qu'elle est négative.
6. Donner la courbure moyenne H et vérifier qu'elle est de signe constant et ne s'annule que le long du cercle $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$
7. Montrer que la surface $\mathcal{S}$ est réglée, au sens où elle est couverte par les droites $\mathcal{D}_\alpha$ définies par :

$$\mathcal{D}_\alpha := \{(t \cos \alpha - \sin \alpha, t \sin \alpha + \cos \alpha, t), t \in \mathbb{R}\}$$

8. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée tracée sur la surface $\mathcal{S}$. pose $m(t) = \frac{dt}{ds} = \|\dot{\gamma}(t)\|^{-1}$. Vérifier que :

$$T = m(t)\dot{\gamma}, \quad \frac{d}{ds}T = m^2(t)\ddot{\gamma}(t) + m(t)\dot{m}(t)\dot{\gamma}(t)$$

9. En déduire que la courbure géodésique peut s'exprimer par :

$$\kappa_g = \det(N, T, \dot{T}) = m^3(t) \det(N, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$$

10. Calculer les courbure géodésiques des courbes suivantes :

- (a) Les courbes $u = u_0$
- (b) Les courbes $v = v_0$
- (c) Les courbes $\mathcal{D}_\alpha$

11. parmi celles-ci, lesquelles sont des géodésiques ?

12. On considère la courbe $\mathcal{C}$ formée, dans l'ordre, par les quatre morceaux suivants :

- l'arc de cercle $\mathcal{C}_1$ découpé par $z = 0$ (dans $y > 0$) allant de $A_1(0, 1, 0)$ point $A_2(-1, 0, 0)$;
- le segment $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{D}_{\pi/2}$ joignant A_2 à $A_3(-1, 1, 1)$;
- l'arc de cercle $\mathcal{C}_3$ découpé par $z = 1$ dans $y \geq 0$, allant de A_3 au point $A_4(1, 1, 1)$;
- le segment $\mathcal{C}_4$ de $\mathcal{D}_0$ joignant A_4 et A_1 à A_1 .

- (a) Ecrire la formule de Gauss-Bonnet pour $\mathcal{C}$
- (b) calculer les angles aux sommets des points A_i , ainsi que l'intégrale de courbure géodésique sur chaque courbe $\mathcal{C}_i$
- (c) En déduire la valeur de l'intégrale de la courbure de Gauss sur la délimitée.