

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES. FDS/UL

Master Maths, sem.1. 2023-2024

Épreuve de 1MTH2120, Analyse Fonctionnelle

Durée 2 h.

1. Soit $\mathcal{E}$, un $\mathbb{K}$ -espace normé. Montrer que :

1.1. si $\mathcal{E}$ est complet, alors, une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{E}$ est convergente si et seulement si la suite $(\|x_n\|)$ des normes est convergente.

1.2. si, $\dim \mathcal{E} = n$, est finie, alors $\mathcal{E}$ est un espace de Banach.

2. Nous considérons un espace topologique T , localement compact et $\mathcal{C}_0(T)$, l'espace des fonctions complexes, continues sur T et tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme définie par :

$$\|u\| = \sup\{|u(t)| \mid t \in T\}.$$

La fonction u tend vers 0 à l'infini signifie que

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \Rightarrow \{t \in T \mid |u(t)| \geq \varepsilon\} \text{ est compact}).$$

Montrer que $\mathcal{C}_0(T)$ est un espace de Banach.

3. Montrer qu'étant donné un espace normé $\mathcal{N}$, k vecteurs linéairement indépendants $a_1, a_2, \dots, a_k$, et k scalaires quelconques $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, alors il existe $f \in \mathcal{N}'$, dual topologique de $\mathcal{N}$, telle que

$$f(a_p) = \lambda_p, p \in \{1, 2, \dots, k\}.$$