

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (6 points)

Soit O un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : O \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est logarithmiquement convexe (sur O) lorsque la fonction $\ln f : O \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

1) a) Montrer que si $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, il en est de même de la fonction e^φ

b) En déduire qu'une fonction logarithmiquement convexe est nécessairement convexe.

2) a) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i) f est logarithmiquement convexe ;

ii) la fonction $x \mapsto e^{(a, x)} f(x)$ est convexe sur $O \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$.

b) En déduire que si f_1 et f_2 sont logarithmiquement convexes et deux fois différentiable sur O , il en est de même de leur somme $f_1 + f_2$

3) On suppose ici que f est deux fois différentiable sur O .

Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i) f est logarithmiquement convexe ;

ii) $f(x) \nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x) \nabla^T f(x)$ (i.e. la matrice $f(x) \nabla^2 f(x) - \nabla f(x) \nabla^T f(x)$ est semi définie positive) $\forall x \in O$;

iii) la fonction $x \mapsto e^{(a, x)} f(x)$ est convexe sur $O \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 (6 points)

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

1) Interpréter $(\mathcal{P})$ comme un problème de projection. En déduire que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^n$. Discuter son unicité en fonction du rang de A .

2) Montrer que u est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$A^T A u = A^T b.$$

3) On considère $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2.$$

a) Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)$.

b) Ecrire l'équation d'Euler satisfaite par u_ε .

c) Montrer que $\|u_\varepsilon\| \leq \|u\|$ pour tout u solution de $(\mathcal{P})$.

Exercice 3 (7 points)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et définie positive, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang m et $b \in \mathbb{R}^m$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et l'ensemble des contraintes

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}.$$

1) Montrer que $C \neq \emptyset$.

2) Montrer l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur C noté x^* .

3) Montrer qu'il existe $u^* \in \mathbb{R}^m$ tel que le système suivant soit satisfait.

$$\begin{cases} Ax^* - b + B^T u^* = 0 \\ Bx^* = 0 \end{cases}$$

4) Déterminer alors x^* et u^* .