

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

SEMESTRE : 3

DURÉE : 2 H

Exercice 1

Dans un cylindre $C = (0, +\infty) \times G$, où le domaine G est limité par S , on donne le problème mixte :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -L(U) + F(x, t) \quad (1)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \Phi(x) \quad (3)$$

$$\left(\alpha U + \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_S = 0 \quad (4)$$

où

$$L(U) = - \sum_{i=1}^n P(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + q(x)U \quad \text{avec } P > 0, q \geq 0$$

définissant le mouvement d'un système mécanique dont l'intégrale d'énergie est :

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_G \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + P(x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_S \frac{\alpha}{\beta} P(x) U^2(x) ds + \frac{1}{2} \int_G q(x) U^2(x) dx.$$

1. Quel est le type de l'opérateur L ? En déduire le type de l'équation (1).
2. Quel nom porte l'inégalité suivante :

$$\|U\|_2 \leq \|\varphi\|_2 + \sqrt{2} J(0)t + \int_0^t (t - \tau) \|F\|_2 d\tau.$$

3. Utilisez cette inégalité pour démontrer l'unicité de la solution du problème (1)-(4), pour $\varphi(x) = \Phi(x) = F(x, t) = 0$, $q = 0$, $P = 1$, $n = 1$.

Exercice 2

Appliquer la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Exercice 3

Citer trois méthodes variationnelles de résolution des problèmes aux limites et dites à quoi sert la suite minimisante.