

Université de Lomé
Faculté des Sciences
Département de Maths

Rattrapage 2MTH2120 (Théorie des opérateurs)

Durée : 1 heure 30

Tous les opérateurs considérés ici sont linéaires et bornés sur un espace de Hilbert complexe H .

1. Montrer que T est normal si et seulement si $\forall x \in H, \|T^*x\| = \|Tx\|$.
2. Si S et T sont des opérateurs auto-adjoints, en est-il de même de ST ?
3. On suppose que $\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$. Peut-on dire que T est auto-adjoint ?
4. Soient λ, μ des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint T . On désigne respectivement par H_λ et H_μ les sous-espaces propres correspondants.
 - (a) Montrer que λ est réel.
 - (b) Montrer que si $\lambda \neq \mu$ alors $H_\lambda \perp H_\mu$.
5. On suppose ici que T est auto-adjoint. Soit y un vecteur fixé de H . On considère l'équation

$$x \in H, Tx = y.$$

Montrer qu'une condition nécessaire pour que cette équation ait une solution est $y \in \ker(T)^\perp$.