

EXAMEN DU SEMESTRE HARMATTAN 2
EPREUVE : 2MTH2325 (EQUATIONS FRACTIONNAIRES)
DATE : 14 JUIN 2025
DURÉE : 3H00

Exercice 1

Calculer à l'aide de la fonction Gamma les intégrales suivantes

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$

2. $I_2 = \int_0^{+\infty} 3^{-4x^2} dx$

3. $I_3 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2\sqrt{x}} dx$

4. $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x|} dx$

5. $I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

Exercice 2Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^4$

1. Calculer $I_1^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.

2. Calculer ${}^C D_1^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{11}{2}$.

3. Calculer ${}^{RL} D_1^\alpha f(x)$ pour $\alpha = \frac{3}{2}$.

Exercice 3Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{kx}$, $k > 0$.

1. Calculer $I_{-\infty}^\alpha f(x)$.

2. Calculer ${}^{RL} D_{-\infty}^\alpha f(x)$.

Exercice 4

Utiliser la méthode de la transformée de Laplace pour résoudre le problème mixte pour une équation fractionnaire de diffusion

$${}^C D_t^\alpha u = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad a > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$$

$$\text{N.B. : } {}^C D_t^\alpha g = {}^C D_0^\alpha g(t).$$