

DOMAINE : Sciences et technologies

PARCOURS : licence fondamentale

ETABLISSEMENT : Faculté des Sciences de l'Université de Lomé

UE : Principe fondamental de la dynamique

CODE : MTH 1328

CREDITS : 4

PUBLIC CIBLE : étudiants des licences sciences et technologies

SEMESTRE : Mousson (S4)

PRÉ REQUIS: MTH 1224, PHY 104.

RESPONSABLE : d'ALMEIDA Amah Séna

Maître de Conférences en mathématiques (Mécanique)

Département de Mathématiques, Faculté Des Sciences, Université de Lomé, Togo

Email : dal_me@yahoo.fr

OBJECTIFS DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

Objectif général

Cet enseignement vise à faire acquérir à l'étudiant les concepts de base de la modélisation mathématique de phénomènes mécaniques.

Objectifs spécifiques

Au terme de cet enseignement, l'apprenant devrait savoir utiliser le langage mathématique pour traduire le principe fondamental de la dynamique et en déduire les théorèmes généraux de la dynamique des solides parfaits et appliquer le formalisme ainsi obtenu pour résoudre des problèmes concrets.

Contenu

- Préliminaires
- Théorèmes généraux de la mécanique du solide
- Théorème de l'énergie cinétique
- Liaisons
- Repères galiléens approchés

Activités d'apprentissage

Cours magistraux, Travaux Dirigés

Mode et critère d'évaluation

Devoir sur table et examen final

Bibliographie

- 1- Cours de mécanique générale, P. Brousse, Armand Colin-Collection U
- 2- Exercices et problèmes de mécanique, M. Mantion, Armand Colin-Collection U

Mécanique

Mécanique

Chapitre 1

Cinétique

La cinétique a pour objet le calcul du vecteur $\vec{\mu}(S) = \sum_{P \in (S)} m \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P)$ représentant le moment cinétique en O de (S) et le scalaire $T = \frac{1}{2} \sum_{P \in (S)} m \left[\vec{V}(P) \right]^2$ qui est l'énergie cinétique du système matériel (S) .

1.1 Torseur cinétique - Torseur dynamique

On considère un système matériel (S) en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ les champs des vitesses et des accélérations des points de (S) par rapport à $\mathcal{R}$, O un point de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

Définition

On appelle torseur cinétique, le torseur associé à (S) et au champ $\vec{V}$.

On appelle torseur dynamique, le torseur associé à (S) et au champ $\vec{\Gamma}$.

Les éléments de réduction au point O de ces deux torseurs sont d'une part :

— *Résultante cinétique ou somme des quantités de mouvement*

$$\text{Cas discret : } \vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(P_i)$$

$$\text{Cas général : } \vec{R} = \int_{P \in (S)} \vec{V}(P) dm$$

— *Moment cinétique en O*

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \wedge m_i \vec{V}(P_i) \text{ ou } \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P) dm$$

Et d'autre part :

— *Résultante dynamique ou somme des quantités d'accélération*

$$\text{Cas discret : } \vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}(P_i)$$

$$\text{Cas général : } \vec{R} = \int_{P \in (S)} \vec{\Gamma}(P) dm$$

— *Moment dynamique en O*

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \wedge m_i \vec{\Gamma}(P_i) \text{ ou } \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}(P) dm$$

Calcul des résultantes cinétiques

On note M la masse totale de (S) , O est lié à la référence $\mathcal{R}$.

— *Cas discret*

Le centre d'inertie G est tel que $M\vec{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OP}_i$. On dérive par rapport à t , les masses étant indépendants du temps. On a :

$$1. \text{ Résultante cinétique : } M\vec{V}(G) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(P_i)$$

$$2. \text{ Résultante dynamique : } M\vec{\Gamma}(G) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}(P_i)$$

— *Cas général*

Le centre d'inertie G est tel que $M\vec{OG} = \int_{(S)} \vec{OP} dm$

Les hypothèses générales sont : mouvement de classe $\mathcal{C}^2$, les masses indépendantes de t et autorisent la dérivation par rapport à t sous le signe $\int$. Il en résulte :

$$1. \text{ Résultante cinétique : } M\vec{V}(G) = \int_{(S)} \vec{V}(P) dm$$

$$2. \text{ Résultante dynamique : } M\vec{\Gamma}(G) = \int_{(S)} \vec{\Gamma}(P) dm$$

Moment cinétique et moment dynamique

Définition

— Le vecteur $\vec{\mu}_Q(S) = \int_{P \in (S)} \vec{QP} \wedge \vec{V}(G) dm$ est le moment cinétique de (S) en Q .

— Le vecteur $\vec{\delta}_Q(S) = \int_{P \in (S)} \vec{QP} \wedge \vec{\Gamma}(G) dm$ est le moment dynamique de (S) en Q .

Relation entre le moment dynamique et le moment cinétique

L'observateur de $\mathcal{R}$ calcule $\frac{d}{dt} \vec{\mu}_Q(S)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\mu}_Q(S) &= \frac{d}{dt} \int_{P \in (S)} \vec{QP} \wedge \vec{V}(G) dm = \int_{P \in (S)} \frac{d}{dt} \vec{QP} \wedge \vec{V}(G) dm + \int_{P \in (S)} \vec{QP} \wedge \vec{\Gamma}(G) dm \\ \int_{P \in (S)} \frac{d}{dt} \vec{QP} \wedge \vec{V}(G) dm &= \int_{P \in (S)} [\vec{V}(P) - \vec{Q}] \wedge \vec{V}(G) = -\vec{V}(P) \wedge \int_{P \in (S)} \vec{V}(G) dm \\ &= M\vec{V}(G) \wedge \vec{V}(Q) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{\mu}_Q(S) = \vec{\delta}_Q(S) + M\vec{V}(G) \wedge \vec{V}(Q)}$$

Si Q est égal à O lié à $\mathcal{R}$ (par exemple $Q \equiv O$ origine de $\mathcal{R}$) alors

$$\frac{d}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \vec{\delta}_O(S)$$

Si $Q \equiv G$ centre de gravité de (S)

$$\frac{d}{dt} \vec{\mu}_G(S) = \vec{\delta}_G(S)$$

Moment cinétique d'un solide mobile autour d'un point fixe O

On considère un solide (S) mobile par rapport à $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé direct, $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ repère orthonormé direct lié à (S). On donne $\vec{\omega}_1^{(0)} = p\vec{f}_1 + q\vec{f}_2 + r\vec{f}_3$. On désigne par x, y, z les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_1$ d'un point P lié à (S).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\mu}_O(S) &= \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge \vec{V}^{(0)}(P) dm = \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge [\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP}] dm \quad \text{car } \vec{V}^{(0)} = \vec{0} \\ &= I_O(S) \vec{\omega}_1^{(0)} \end{aligned}$$

où $I_O(S)$ est la matrice de l'opérateur $\mathcal{I}(O, S)$ par rapport à la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$

Calcul de $\vec{\mu}(S)$ dans le mouvement le plus général d'un solide (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$

(S) mobile par rapport à $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé direct, $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ repère orthonormé direct lié à (S), $\vec{\omega}_1^{(0)} = p\vec{f}_1 + q\vec{f}_2 + r\vec{f}_3$, M masse de (S), A un point quelconque lié à (S), $\vec{V}^{(0)}(A)$ connue et G le centre de gravité de (S). On a :

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_O(S) &= \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge \vec{V}^{(0)}(P) dm = \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge [\vec{V}^{(0)}(A) + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}] dm \\ &= \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge \vec{V}^{(0)}(A) dm + \vec{\alpha} \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm = \int_{P \in (S)} (\vec{OA} + \vec{AP}) \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm \\ &= \int_{P \in (S)} \vec{OA} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm + \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm \\ \vec{\mu}_O(S) &= \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge \vec{V}^{(0)}(A) dm + \int_{P \in (S)} \vec{OA} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm + \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP}) dm \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mu}_O(S) = M \vec{OG} \wedge \vec{V}^{(0)}(A) + M \vec{OA} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AG}) + I_A(S) \vec{\omega}_1^{(0)}}$$

Cette fomule traduit le théorème de KOENIGS pour le moment cinétique dans le cas où $A \equiv G$ par :

$$\boxed{\vec{\mu}_O(S) = M \vec{OG} \wedge \vec{V}^{(0)}(G) + I_G(S) \vec{\omega}_1^{(0)}}$$

Le moment cinétique en O est égal à la somme du moment en O de la quantité de mouvement de G de masse M et du moment cinétique en G dans le moment de (S) autour de G.

1.2 Energie cinétique

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé direct.

Définition

On appelle énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ la quantité :

$$T = \frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \left[\vec{V}^{(0)}(P) \right]^2 dm$$

1.2.1 Énergie cinétique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$

Soit $\mathcal{R}_1 = (0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ un repère lié au solide (S), on donne $\vec{\omega}_1^{(0)} = p \vec{f}_1 + q \vec{f}_2 + r \vec{f}_3$. Soit $P(x, y, z)$ un point quelconque de (S)
 $\vec{V}^{(0)}(P) = \vec{V}^{(0)}(O) + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP}$ d'où

$$T = \frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \left[\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP} \right]^2 dm$$

or

$$\begin{aligned} \left[\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP} \right]^2 &= (\vec{\omega}_1^{(0)})^2 \vec{OP}^2 - \left[\vec{\omega}_1^{(0)} \cdot \vec{OP} \right]^2 \\ &= (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (px + qy + rz)^2 \\ &= (y^2 + z^2)p^2 + (x^2 + z^2)q^2 + (x^2 + y^2)r^2 - 2xypq - 2yzqr - 2zxrp \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$\boxed{2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Fpq - 2Dqr - 2Erp}$$

C'est une forme quadratique par rapport aux trois composantes de $\vec{\omega}_1^{(0)}$
 On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= Ap - Fq - Er \\ \frac{\partial T}{\partial q} &= -Fp + Bq - Dr \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= -Er - Dq + Cr \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{2T = p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r}} \quad (\star)$$

Les trois dérivées partielles ci-dessus ne sont autres que les composantes sur $\mathcal{R}_1$ de $\vec{\mu}_O(S)$.
 Il résulte de $(\star)$ que

$$\boxed{2T = \vec{\omega}_1^{(0)} \cdot I_O(S) \vec{\omega}_1^{(0)}}$$

1.2.2 Théorème de Koenigs pour l'énergie cinétique

On utilise les mêmes hypothèses que précédemment :

$$\begin{aligned} 2T &= \int_{P \in (S)} \left[\vec{V}^{(0)}(P) \right]^2 dm = \int_{P \in (S)} \left[\vec{V}^{(0)}(A) + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP} \right]^2 dm \\ &= \int_{P \in (S)} \left[\vec{V}^{(0)}(A) \right]^2 dm + 2 \int_{P \in (S)} \vec{V}^{(0)}(A) \cdot \left[\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP} \right]^2 dm + \int_{P \in (S)} (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{AP})^2 dm \\ 1^{\text{er}} \text{ terme } &\left[\vec{V}^{(0)}(A) \right]^2 \int_{P \in (S)} dm = M \left[\vec{V}^{(0)}(A) \right]^2 \end{aligned}$$

$$2^{\text{me}} \text{ terme } 2 \int_{P \in (S)} \vec{V}^{(0)}(A) \cdot [\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{AP}]^2 dm = 2 \vec{V}^{(0)}(A) \cdot (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge M \overrightarrow{AG})$$

$$3^{\text{me}} \text{ terme } \int_{P \in (S)} (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{AP})^2 dm = \vec{\mu}_A(S) \cdot \vec{\omega}_1^{(0)}$$

$$= I_A(s) \vec{\omega}_1^{(0)} \cdot \vec{\omega}_1^{(0)}$$

= 2 fois l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement

autour de A

$$\boxed{2T = M \left[\vec{V}^{(0)}(A) \right]^2 + 2 \vec{V}^{(0)}(A) \cdot (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge M \overrightarrow{AG}) + I_A(s) \vec{\omega}_1^{(0)} \cdot \vec{\omega}_1^{(0)}}$$

Avec $A \equiv G$ on $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ et on obtient le théorème de Koenigs pour l'énergie cinétique.

$$\boxed{2T = M \left[\vec{V}^{(0)}(G) \right]^2 + I_G(s) \vec{\omega}_1^{(0)} \cdot \vec{\omega}_1^{(0)}}$$

$T \equiv$ énergie cinétique du point G de masse M + énergie cinétique de (S) dans son mouvement autour de G.

Chapitre 2

Principes généraux de la dynamique

2.1 Introduction

La mécanique classique, qui est le cadre de ce cours, couvre plusieurs domaines d'études tels que la statique, la cinématique et la dynamique. Elle a un vaste champ d'applications qui va de l'étude des petites particules à celle des astres en passant par celle des objets terrestres.

L'étude du mouvement des solides dans le cadre de la mécanique classique nécessite un bagage mathématique qui a été introduit à travers l'étude des torseurs et à l'occasion de la précision des définitions de grandeurs telles que le temps, la masse, la vitesse ou l'accélération etc....

Selon les théories d'Aristote, philosophe grec (384- 322 avant JC), la terre, immobile , est le centre de l'Univers. Les corps lourds sont naturellement attirés par elle et les corps légers comme les astres (lune, soleil, autres planètes de l'Univers ...) flottent dans le ciel. Ces théories étaient en vigueur jusqu'au dix-septième siècle pendant lequel Galiléo Galilée (Galilée), physicien et astronome italien (1564-1642), découvre les lois de la pesanteur. Il précise la notion de force qui était vague jusqu'alors et énonce le principe d'inertie.

En s'appuyant sur les travaux de Galilée, Isaac Newton (1642-1727) donne des définitions rigoureuses de la masse et de la force qu'il relie à l'accélération dont il a compris le caractère vectoriel. Newton énonce notamment le principe fondamental de la dynamique.

2.2 Préliminaires

2.2.1 L'espace et le temps

En mécanique classique, le temps, l'espace et la masse sont de natures totalement différentes (par opposition par exemple à la relativité générale dans laquelle ils sont liés).

L'espace

La mécanique classique entérine le fait que dans l'expérience courante l'espace physique nous apparaît comme possédant trois dimensions : hauteur, longueur et largeur. Le modèle mathématique de l'espace physique est donc l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

Le temps

La notion de temps est intuitivement donnée à l'observateur par la répétition périodique de phénomènes naturels (marée, lever de soleil, ...). La conscience du déroulement des phénomènes de la nature est liée au temps biologique dont nous appréhendons les propriétés notamment par l'évolution irréversible des processus qui nous font évoluer de la naissance à la mort. Le temps qui intéresse le mécanicien est celui qui découle de notre observation directe, de notre expérience courante du mouvement, de la notion intuitive et banale de changement. L'expérience concrète du mouvement rectiligne uniforme montre que pour tenir compte quantitativement de la notion qualitative de changement un seul paramètre est suffisant. Le modèle mathématique du temps est l'espace affine orienté de dimension un $\mathbb{R}$. Les détails de la modélisation sont donnés dans le cours de cinématique.

2.2.2 Notion de force

Définitions

Définition : action mécanique

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos ou de créer son mouvement.

Les actions mécaniques peuvent être à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique) ou mde contact (chargement ponctuel, liaisons ...)

Définition : force

Une force est une action mécanique s'exerçant en un point matériel. Elle peut être représentée par un glisseur : le glisseur associé au vecteur lié $\{\mathbf{M}, \vec{\mathbf{F}}\}$. $\mathbf{M}$ est le point en lequel s'exerce la force ; le vecteur libre $\vec{\mathbf{F}}$ donne l'intensité, la direction et le sens de l'action mécanique.

Forces réparties en volume

Définition

Les actions mécaniques s'exerçant sur un système matériel (S) occupant un volume $\mathcal{V}$ peuvent être réparties dans le volume $\mathcal{V}$ avec une densité volumique $\vec{\mathbf{f}}$. La densité volumique de force $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{M})$ définie en tout point $\mathbf{M}$ de $\mathcal{V}$ permet ainsi de calculer la force $\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{M}) = \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{M})\delta\mathcal{V}$. $\vec{\mathbf{F}}$ est appliqué en $\mathbf{M}$.

Soit $\mathcal{T}$ le torseur des efforts mécaniques exercés sur (S) ses éléments de réduction en un point $\mathbf{A}$ sont :

La résultante générale $\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{M})d\mathcal{V}$,

Le moment résultant en $\mathbf{A}$ $\int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{M})d\mathcal{V}$.

Les définitions pour les forces réparties en surfaces et en ligne sont analogues.

Forces intérieures - forces extérieures**Définition**

Une force sur un système matériel (S) est dite intérieure si elle est exercée sur (S) par un système matériel (S') n'ayant aucune partie matérielle commune avec (S)

Une force sur (S) est dite intérieure si elle s'exerce entre des parties de (S).

Force totale**Définition**

La force totale exercée sur le système matériel (S) est la force exercée sur (S) par l'Univers privé de (S).

2.3 Principes généraux**Axiome 1**

A chaque instant tout système matériel (S) exerce sur tout point matériel n' appartenant pas à (S) une force indépendante de tout observateur.

Axiome 2 : principe d'additivité

Si un système matériel (S) subit de la part de deux systèmes matériels disjoints (S_1) et (S_2) les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ respectivement, alors il subit de la part de la réunion ($S_1 \cup S_2$) la force $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

2.4 Influence du changement de temps sur l'accélération

Deux observateurs de deux espaces $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ utilisent deux temps T_0 et T_1 et perçoivent simultanément un même évènement (par transmission instantanée de l'information entre l'évènement et l'observateur).

Si l'observateur de $\mathcal{R}_0$ utilise la variable t et l'observateur de $\mathcal{R}_1$ la variable t_1 alors il y a simultanéité d'une date t du temps T_0 et d'une date t_1 du temps T_1 . On peut définir une correspondance f entre T_0 et T_1 telle que $t = f(t_1)$.

f est appelée fonction changement de temps.

On fait sur f des hypothèses conformes à la notion intuitive du temps s'écoulant du passé vers l'avenir continûment. Ainsi f est supposé continue, de classe $\mathcal{C}^2$ et strictement croissante. Ainsi f^{-1} est une fonction changement de temps. De même si f et g sont deux fonctions changement de temps alors $g \circ f$ est une fonction changement de temps.

Les temps des divers observateurs de l'univers se déduisent les uns des autres par des fonctions changement de temps. On en déduit que tous les observateurs de l'univers peuvent se ramener à l'usage du même temps T , donc de la même variable t , et donc de la même horloge.

Conclusion

Tous les observateurs de l'univers peuvent utiliser le même temps

L'accélération n'est pas invariante par changement de temps

Deux observateurs placés à l'origine d'un même trièdre $\mathcal{R}_0$, utilisant deux temps différents T et T_1 observent le mouvement du même $P/\mathcal{R}_0$.

On a donc les mouvements $\begin{matrix} t & \longmapsto & P(t) \\ t_1 & \longmapsto & P_1(t_1) \end{matrix}$. Avec évidemment $P(t) \equiv P_1(t)$ i.e $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP_1}(t_1)$

Soit $t = f(t_1)$, on a $\frac{d}{dt_1} [\overrightarrow{OP_1}(t_1)] = \frac{d}{dt_1} [\overrightarrow{OP}(t)] = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OP}(t)] \frac{dt}{dt_1}$ d'où

$$\boxed{\vec{V}_1 = \vec{V} \frac{df}{dt_1}}$$

$\frac{d^2}{dt_1^2} [\overrightarrow{OP_1}(t_1)] = \frac{d^2}{dt^2} [\overrightarrow{OP}(t)] \left(\frac{dt}{dt_1} \right)^2 + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OP}(t)] \frac{d^2t}{dt_1^2}$ d'où

$$\boxed{\vec{\Gamma}_1 = \left(\frac{df}{dt_1} \right)^2 \vec{\Gamma} + \frac{d^2f}{dt_1^2} \vec{V}}$$

2.5 Torseurs des forces extérieures sur un système

Le torseur des forces extérieures sur un système matériel (S) est le torseur des forces exercées sur (S) par l'univers privé de (S).

- a) Ces forces peuvent-être discrètes si le système est discret. Elles sont alors représentées par des vecteurs liés $\{P_j, \vec{F}_j\}$.
- b) Si (S) est continu, on définit une densité massique de force à tout instant t $\vec{\rho}_t$.

La résultante générale est alors $\vec{R} = \int_{(S)} \vec{\rho}_t(P) dm$. Le moment résultant en A est

$$\int_{(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\rho}(P) dm.$$

Ces sommes sont curvilignes, surfaciques et volumiques.

2.6 Principe fondamental - Temps galiléen - Espace galiléen

Soit (S) un système matériel, M sa masse, $\vec{\Gamma}$ son accélération par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$. La quantité $M\vec{\Gamma}$ appartient à l'espace vectoriel euclidien réel $\mathbb{R}^3$ orienté; mais cet espace comme on vient de le voir dépend du temps de l'observateur de $\mathbb{R}^3$. Cependant l'expérience courante montre qu'il y a une égalité entre cette quantité et "la force extérieure". On est donc amené à énoncer le principe suivant qui n'est justifié que par ses conséquences.

2.6.1 Enoncé

Il existe un temps T appelé temps Galiléen ou absolu tel que l'espace vectoriel des forces soit identique à celui des quantités d'accélération.

Ou pour un point matériel P de masse m soumis à une force totale $\vec{F}$, il existe un repère d'espace et un repère de temps, l'ensemble étant un repère galiléen tel que si $\vec{\Gamma}$ est l'accélération de P par rapport à ce repère on ait $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

Conséquence

Le repère de temps du repère galiléen est unique.

En effet si on associe un autre temps T_1 tel que $t = f(t_1)$ avec f différent de l'identité alors $\vec{F} \neq m \vec{\Gamma}_1$, ($\vec{\Gamma}_1$ calculé avec t_1).

Dans la suite, on utilisera un repère galiléen.

2.6.2 Forces correctives d'espace - classe d'espaces dynamiquement équivalents

Forces correctives d'entraînement et de Coriolis

On considère un point matériel P de masse m mobile par rapport à deux trièdres $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. On suppose que $\mathcal{R}_0$ est galiléen et $\mathcal{R}_1$ est en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}_0$.

On note $\vec{F}$ la force totale appliquée à P et $\vec{\Gamma}(P)$ son accélération par rapport à $\mathcal{R}_0$.

$\vec{\Gamma}^{(0)}(P) = \vec{\Gamma}^{(1)}(P) + \vec{\Gamma}_e(P) + \vec{\Gamma}_c(P)$ d'où

$$\vec{F} = m \vec{\Gamma}(P) = m \left(\vec{\Gamma}^{(1)}(P) + \vec{\Gamma}_e(P) + \vec{\Gamma}_c(P) \right) \implies m \vec{\Gamma}^{(1)}(P) = \vec{F} - m \left[\vec{\Gamma}_e(P) + \vec{\Gamma}_c(P) \right]$$

Pour l'observateur de $\mathcal{R}_1$, le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ se traduit par l'apparition de deux forces exercées sur P qui ne sont pas des forces directement appliquées à P par un système matériel quelconque :

- $m \vec{\Gamma}_e(P)$: force corrective ou fictive ou d'inertie d'entraînement
- $m \vec{\Gamma}_c(P)$: force corrective ou fictive ou d'inertie de Coriolis

Espaces dynamiquement équivalents

Définition

On dit que deux repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont dynamiquement équivalents s'ils sont en mouvement de translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

La relation d'équivalence dynamique est une relation d'équivalence sur l'ensemble des repères ou espaces d'observateurs.

Condition pour que deux repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ soient dynamiquement équivalents

$\mathcal{R}_1$ dynamiquement équivalent à $\mathcal{R}_0$ si et seulement si $\mathcal{R}_1$ a un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$: $\iff$

$\vec{\omega}_1^{(0)} = \vec{0}$ et $\vec{\Gamma}^{(0)}(O_1) = \vec{0}$, O_1 étant l'origine de $\mathcal{R}_1$.

Or on a $\vec{\Gamma}^{(0)}(P) = \vec{\Gamma}^{(1)}(P) + \vec{\Gamma}_e(P) + \vec{\Gamma}_c(P)$ avec :

$$\begin{cases} \vec{\Gamma}_e(P) = \vec{\Gamma}^{(0)}(O_1) + \frac{d\vec{\omega}_1^{(0)}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge [\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \overrightarrow{O_1P}] \\ \vec{\Gamma}_c(P) = 2\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{V}^{(1)}(P) \end{cases} . \text{ On en déduit donc que}$$

si $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont dynamiquement équivalents alors $\forall P, \forall \vec{\Gamma}^{(0)}(P) = \vec{\Gamma}^{(1)}(P)$.

Réciproquement, on admet que si $\forall P, \vec{\Gamma}^{(0)}(P) = \vec{\Gamma}^{(1)}(P)$ alors $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont dynamiquement équivalents.

Pour un système matériel (S) quelconque, on énonce le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

Il existe une classe d'espaces dynamiquement équivalents tels que pour tout système matériel (S) , le torseur dynamique de (S) soit égal au torseur des forces extérieures appliquées à (S) .

Définition

La classe d'espaces pour lesquels $\mathcal{T}_{\text{dyn}} = \mathcal{T}_{\text{ext}}$ est appelée classe de galilée.

Chapitre 3

Théorèmes généraux

Les théorèmes généraux de la dynamique traduisent l'égalité des torseurs dynamique et des forces extérieures en un point quelconque de l'espace.

3.0.3 Théorèmes de la résultante dynamique ou théorème du mouvement du centre d'inertie

Ce théorème traduit l'égalité des résultantes générales du torseur dynamique et du torseur des forces extérieures d'un système matériel (S) mobile par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_0$. On note M la masse de (S) et G son centre de gravité. Alors la résultante générale de $\mathcal{T}_{\text{dyn}}(S)$ est

$$\vec{R} = \int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P) d\mathbf{m} = M \vec{\Gamma}^{(0)}(G)$$

Le théorème de la résultante dynamique s'énonce

$$(1) \left[\int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P) d\mathbf{m} = \vec{E} \text{ ou } M \vec{\Gamma}^{(0)}(G) = \vec{E} \right]$$

Si on pose $\vec{p} = \int_{P \in S} \vec{V}^{(0)}(P) d\mathbf{m} = M \vec{V}^{(0)}(G)$ on obtient

3.0.4 théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique traduit l'égalité en un point donné des moments résultants des torseurs dynamique et des forces extérieures.

soit Q un point quelconque de vitesse $\vec{V}^{(0)}(Q)$ connue par rapport à $\mathcal{R}_0$ galiléen.

Le théorème s'écrit

$$(3) \left[\int_{P \in S} \vec{Q}P \wedge \vec{\Gamma}(P) d\mathbf{m} = \vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{T}_{\text{ext}}) \right]$$

On a montré en cinétique que
$$\begin{aligned} \frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_Q(S) &= \vec{\mathcal{M}}_{\text{dyn en } Q}(S) + M \vec{V}^{(0)}(G) \wedge \vec{V}^{(0)}(Q) \\ &= \vec{\delta}_Q(S) + M \vec{V}^{(0)}(G) \wedge \vec{V}^{(0)}(Q) \end{aligned}$$

donc
$$\int_{P \in S} \vec{Q}P \wedge \vec{\Gamma}(P) d\mathbf{m} = \frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_Q(S) - M \vec{V}^{(0)}(G) \wedge \vec{V}^{(0)}(Q)$$

(3) s'écrit sous la forme équivalente

$$(4) \left[\frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_Q(S) + M \vec{V}^{(0)}(Q) \wedge \vec{V}^{(0)}(G) = \vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{T}_{\text{ext}}) \right]$$

Cas particulier

$$Q \equiv O, O \text{ lié à } \mathcal{R}_0 \text{ alors } \frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \vec{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}_{\text{ext}})$$

$$Q \equiv G \text{ alors } \frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_G(S) = \vec{\mathcal{M}}_G(\mathcal{T}_{\text{ext}})$$

Applications**Equations d'Euler**

Soit (S) un corps en mouvement autour d'un point fixe O origine d'un repère galiléen $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est un repère lié à (S), principal d'inertie de (S).

On suppose que les forces extérieures exercées sur (S) sont composées de forces s'appliquant en O de résultante $\vec{R}$ et d'autres forces.

Application du théorème du moment cinétique

$$\frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \vec{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}_{\text{ext}}) \quad (5)$$

$$\text{Posons } \vec{\omega}_1^{(0)} = p \vec{f}_1 + q \vec{f}_2 + r \vec{f}_3 \text{ et } \mathcal{J}(O, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)}$$

$$\text{on a } \vec{\mu}_O(S) = \mathcal{J}(O, S) \vec{\omega}_1^{(0)} = A p \vec{f}_1 + B q \vec{f}_2 + C r \vec{f}_3 \text{ et } \frac{d^{(0)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \frac{d^{(1)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) + \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{\mu}_O(S)$$

$$\text{avec } \frac{d^{(1)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \frac{d^{(1)}}{dt} \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge (\vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP}) \, dm = \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge \left(\frac{d^{(1)}}{dt} \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{OP} \right) \, dm$$

puisque O et P sont liés à $\mathcal{R}_1$ donc

$$\frac{d^{(1)}}{dt} \vec{\mu}_O(S) = \mathcal{J}(O, S) \left[\frac{d^{(1)}}{dt} \vec{\omega}_1^{(0)} \right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \dot{p} \\ B \dot{q} \\ C \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\text{De plus } \vec{\omega}_1^{(0)} \wedge \vec{\mu}_O(S) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A p \\ B q \\ C r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C - B) q r \\ (A - C) r p \\ (B - A) p q \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\mathcal{T}_{\text{ext}}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\mathbf{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\text{autres forces}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\text{autres forces})$$

Par conséquent (5) est équivalent au système :

$$(6) \quad \begin{cases} A \dot{p} + (C - B) q r = \vec{\mathcal{M}}_O(\text{autres forces}) \cdot \vec{f}_1 \\ B \dot{q} + (A - C) r p = \vec{\mathcal{M}}_O(\text{autres forces}) \cdot \vec{f}_2 \\ C \dot{r} + (B - A) p q = \vec{\mathcal{M}}_O(\text{autres forces}) \cdot \vec{f}_3 \end{cases}$$

Le système (6) est le système des équations d'Euler.

3.1 Cas de la statique

Un système matériel (S) est dit au repos par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_0$ d'origine O si et seulement si $\forall P \in (S), \forall t \quad \vec{OP}(t) = \text{cte}$ ou $\forall P \in (S), \forall t \quad \vec{V}^{(0)}(P) = \vec{0}$.

On en déduit que $\vec{\Gamma}^{(0)}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in (S)$.

Alors le système dynamique de (S) est nul et l'application du principe fondamental de la

statique donne

$$\mathcal{T}_{\text{ext}}(S) = \text{torseur nul}$$

$$\text{d'où le principe fondamental de la statique (7)} \quad \boxed{\mathcal{T}_{\text{ext}} = \vec{0}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_{\text{ext}}) = \vec{0} \end{cases}$$

Le principe fondamental de la statique est une condition nécessaire d'équilibre

3.2 Théorème de l'action et de la réaction

On considère un système matériel (S) $S = S_1 \cup S_2$ tel que $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$. S_1 et S_2 sont en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_0$.

On désigne par $\mathcal{T}_{12}$ (resp. $\mathcal{T}_{21}$) le torseur des efforts exercés par S_1 sur S_2 (resp. S_2 sur S_1), $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) le torseur des efforts exercés sur S_1 à l'exception de ceux exercés par S_2 (resp. le torseur des efforts exercés sur S_2 à l'exception de ceux exercés par S_1).

Soient $\mathcal{T}_{\text{dyn}}^1$ (resp. $\mathcal{T}_{\text{dyn}}^2$) le torseur dynamique de S_1 (resp. S_2), l'application du principe fondamental donne :

$$\text{— Pour } S_1 : \mathcal{T}_{\text{dyn}}^1 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_{21}$$

$$\text{— Pour } S_2 : \mathcal{T}_{\text{dyn}}^2 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_{12}$$

$$\text{— Pour } S = S_1 \cup S_2 : \mathcal{T}_{\text{dyn}}^1 + \mathcal{T}_{\text{dyn}}^2 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \text{ puisque pour le système } S = S_1 \cup S_2, \mathcal{T}_{12} \text{ et } \mathcal{T}_{21} \text{ schématisent des forces intérieures.}$$

$$\text{On en déduit que } \boxed{\mathcal{T}_{12} + \mathcal{T}_{21} = 0}$$

Théorème

Soient S_1 et S_2 deux systèmes matériels sans partie matérielle commune alors le torseur des forces exercées sur S_1 par S_2 et le torseur des forces exercées sur S_2 par S_1 sont opposés.

Chapitre 4

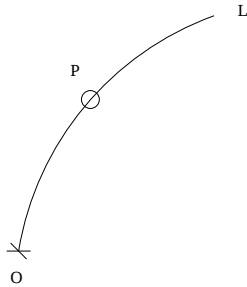
Forces et liaisons

4.1 Forces sur un système matériel

4.1.1 Paramètres de position et force de contact

La position d'un solide (ou d'un système matériel quelconque) par rapport à un référentiel dépend en général de 6 paramètres : les 3 coordonnées d'un point et les trois angles d'Euler. Cependant les systèmes matériels restent en contact ou sont articulés entre eux, ce qui occasionnent des liaisons et réduit le nombres de paramètres.

Considérons un anneau coulissant sur un fil :



On schématise le système par un point matériel P mobile sur une courbe ($\mathcal{L}$) matérialisée. On dit alors que le point matériel P est soumis de la part de ($\mathcal{L}$) à une liaison de contact.

P est astreint à se déplacer sur ($\mathcal{L}$) et le seul paramètre $s = OP(t)$ suffit pour déterminer sa position.

On dit que P est soumis à une liaison bilatérale et possède un seul degré de liberté. Dans le cas d'une bille sur une table, on peut faire la schématisation par un point matériel se déplaçant sur une surface Σ . La liaison est unilatérale et la bille possède deux degrés de libertés.

Le point P mobile sur la courbe matérielle ou sur la surface matérielle est soumis de la part de ($\mathcal{L}$) ou de Σ à une force $\vec{R}$ appliquée à P appelée force de contact ou force de liaison. P exerce sur ($\mathcal{L}$) ou sur Σ la réaction $-\vec{R}$. Les caractéristiques de cette force sont données par les lois de frottements

1. Forces données - champs de forces

Soit P un point matériel mobile par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, de coordonnées (x, y, z) .

Définition

- a) Une force $\vec{F}$ s'appliquant à P est dite donnée si et seulement si on connaît $\vec{F}$ en fonction de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ et t ,
ou si et seulement si il existe une fonction vectorielle $\vec{f}$ de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$ telle que
$$\vec{F} = \vec{f}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \vec{f}(P, \vec{V}, t)$$
- b) On dit alors que l'application $\vec{f}$ définit un champ de forces $\vec{F}$.
- c) On appelle ligne de forces du champ $\vec{F}$, l'ensemble des courbes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ tel qu'en chaque point, $\vec{F}$ soit tangente à ces courbes.
Elles sont définies par l'équation $\vec{F} \wedge d\vec{M} = 0$ ou $\vec{F} = \alpha d\vec{M}$

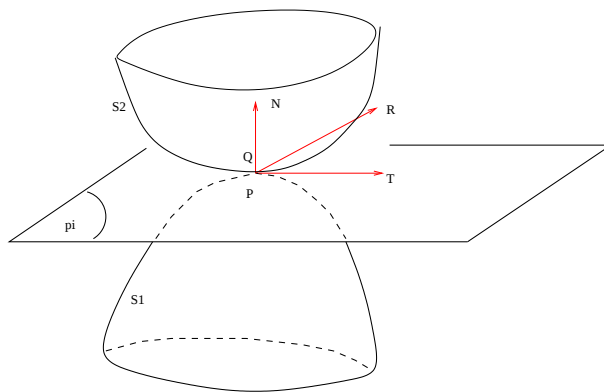
2. Forces dérivant d'un potentiel

Soit un champ de forces $\vec{F}$. On dit que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $V = -U$ ou d'une fonction de force U si et seulement si il existe une fonction U continument différentiable telle que $\vec{F} = \text{grad}U = -\text{grad}V$

3. On appelle équipotentielles du champ $\vec{F}$, les lignes ou surfaces telles que $U = Cte$

4.1.2 Cas d'un système matériel quelconques**1. Forces concentrées**

ce sont des forces s'exerçant sur un ensemble fini de points appartenant au système matériel (S).

2. Lois de frottement solide

S_0 et S_1 sont deux solides en contact ponctuel admettant un plan tangent commun (Π) au point de contact P. Le contact réel s'exerce entre une particule $P_0 \in S_0$ et une particule $P_1 \in S_1$ tel que la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_0 est définie par :

$$\vec{V}_{\text{gliss}} = \vec{V}(P \in S_1/S_0)$$

On schématise l'action de la force de contact exercée par S_0 sur S_1 par une force unique $\vec{R}$ appliquée à P_1 et celle exercée par S_1 sur S_0 par $-\vec{R}$ en P_0 .

On décompose $\vec{R}$ en $\vec{T}$ composante tangentielle et $\vec{N}$ composante normale.

Les **lois expérimentales de Coulomb** expriment qu'il existe un coefficient $f \geq 0$ appelé coefficient de frottement, indépendant des mouvements, mais dépendant de la nature des matériaux en contact, tel que $\forall t$, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ vérifient les deux lois suivantes :

- a) $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$ si $\vec{V}_{\text{gliss}} \neq \vec{0}$.
 $\vec{T}$ et $\vec{V}_{\text{gliss}}$ sont colinéaires et de sens opposés. Si la liaison est unilatérale, le sens de $\vec{N}$ est déterminé.
- b) $|\vec{T}| \leq f|\vec{N}|$ si $\vec{V}_{\text{gliss}} = \vec{0}$.

Si la liaison est unilatérale, le sens de $\vec{N}$ est déterminé.

Contact sans frottement

Il y a non frottement si $f = 0$ c'est à dire $\vec{T} = \vec{0}$, soit $\vec{R} = \vec{N}$.

Dans ce cas, les forces de contact sont normales aux surfaces de contact.

4.2 Quelques exemples de liaisons

4.2.1 Paramètres primitifs

La position d'un corps dépend du temps par l'intermédiaire de fonctions appelées paramètres de position. On a montré qu'un solide indéformable non rectiligne a six paramètres de position qui sont les coordonnées d'un des ses points et les angles d'Euler. Pour un système matériel (Σ) on suppose à priori que la position de tout solide qui le constitue est définie comme si ce solide était seul. Ainsi si (Σ) est constitué de p solides volumiques, q solides surfaciques, de r solides linéiques et de s solides ponctuels sa position dépend a priori de $N = 6p + 5q + 4r + 3s$ paramètres et éventuellement du temps. Ce sont les paramètres primitifs de (Σ)

4.2.2 Liaisons

Lorsqu'on tient compte, pour définir la position d'un solide de (Σ), de la présence des autres constituants de (Σ) et des systèmes matériels extérieurs à (Σ), les propriétés de la matière imposent des restrictions dans les positions et les mouvements possibles de ce solide. On dit alors qu'il est soumis à des liaisons.

Les liaisons rencontrées dans les applications industrielles sont souvent des liaisons géométriques traduites par des relations algébriques et les liaisons cinématiques traduites par des relations différentielles entre les paramètres primitifs et éventuellement le temps.

Une liaison est indépendante du temps si elle se traduit par des relations ne dépendant pas explicitement du temps.

Liaison interne - liaison externe

Une liaison est interne à un système matériel (Σ) si elle se réalise entre deux éléments de (Σ)

Une liaison est externe à un système matériel (Σ) si elle se réalise entre un élément de (Σ) et un solide appartenant à un autre système matériel.

Liaison bilatérale - liaison unilatérale

La relation traduisant une liaison peut être une équation ou une inéquation. Lorsque ce sont des équations on dit que la liaison est bilatérale. On dit que la liaison est unilatérale si elle est traduite par des inéquations.

4.2.3 Exemple de liaison bilatérale : particule sur un cerceau tournant

Le cerceau est schématisé par un cercle de rayon a tournant dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ autour d'un diamètre fixe avec une vitesse angulaire ω , $\omega > 0$. Le centre O du cercle est pris comme origine du repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, l'axe $(O, \vec{z}_0)$ est porté par le diamètre fixe. On suppose que le système de fixation du diamètre et d'entraînement du cerceau n'empêche pas le passage de la particule. Celle-ci peut donc décrire le cerceau en entier.

La présence du cercle incite à utiliser les coordonnées sphériques r, θ, ψ . soit P le point représentant la particule, on a $r = \|\vec{OP}\|$, $\psi = \text{angle}(\vec{x}_0, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$, $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de l'axe du cercle, $\theta = \text{angle}(\vec{z}_0, \vec{OP})$ mesuré autour de $\vec{u}$.

Le maintien de la particule sur le cerceau se traduit par les deux équations : $r = a$ et $\psi = \omega t$ en prenant pour $\vec{x}_0$ la position du vecteur $\vec{u}$ à l'instant initial.

4.2.4 Exemple de liaison unilatérale : billes reliées par un fil

On considère un système matériel (Σ) formé deux billes modélisées par deux points matériels P et P' . Les paramètres primitifs de (Σ) sont les coordonnées des deux points dans le repère R_0 , x, y, z, x', y', z' . Si les deux billes sont réunies par un fil inextensible de longueur l alors les paramètres de position sont liés par l'inéquation $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \leq l^2$.

4.3 Perfection des liaisons

Définition

Une liaison $\mathcal{L}$ est parfaite si la puissance des efforts de liaison est nulle pour tout mouvement la respectant.

Si $\mathcal{L}$ est une liaison entre les solides (S_1) et (S_2) la puissance $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ est le comoment du torseur cinématique $[\mathcal{C}]$ et du torseur des efforts de liaison de (S_1) sur (S_2) $\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}$. Donc $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \vec{R}\vec{V}(A \in S_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2)\vec{M}_A$ où A est un point de la liaison et les vecteurs intervenant dans le calcul les éléments de réduction respectifs des deux torseurs au point A .

Si dans repère donné on a : $\vec{R} = (X, Y, Z)$, $\vec{\Omega}(S_1/S_2) = (p, q, r)$, $\vec{V}(A \in S_1/S_2) = (u, v, w)$, $\vec{M}_A = (L, M, N)$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow uX + vY + wZ + pL + qM + rN = 0$.

4.3.1 Perfection d'une liaison ponctuelle en I

On choisit le repère $R = (I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $(I, \vec{x}, \vec{y})$ repère du plan tangent à (S_1) et (S_2) en I . Alors $\vec{V}(I \in S_1/S_2) = u\vec{x} + v\vec{y}$:

- a) Cas avec glissement : $\vec{V}(I \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$.
 $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow uX + vY + pL + qM + rN = 0, \forall u, v, p, q, r$.
Donc $\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}$ est un glisseur de vecteur colinéaire à $\vec{z}$.
- b) Cas sans glissement : $\vec{V}(I \in S_1/S_2) = \vec{0}$.
 $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow pL + qM + rN = 0, \forall p, q, r$.
Donc $\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}$ est un glisseur de vecteur $\vec{R}$ quelconque.

4.3.2 Perfection d'une liaison multiple

On étudie la perfection de la liaison pour quelques contacts multiples.

- 1) Liaison rotoïde autour de l'axe $(A, \vec{z})$

Définition

Un contact entre les solides (S_1) et (S_2) est une liaison rotoïde ou pivot d'axe $(A, \vec{z})$ si les seuls mouvements possibles de (S_2) par rapport à (S_1) sont les rotations d'axe $(A, \vec{z})$.

On a $[C] = [r\vec{z}, \vec{0}]$ donc la liaison est parfaite si et seulement si $\vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0$.

- 2) Liaison glissière d'axe $(A, \vec{z})$

Définition

Un contact entre les solides (S_1) et (S_2) est une liaison glissière d'axe $(A, \vec{z})$ si les seuls mouvements possibles de (S_2) par rapport à (S_1) sont les translations rectilignes de vecteur directeur $\vec{z}$.

On a $[C] = [\vec{0}, w\vec{z}]$ donc la liaison est parfaite si et seulement si $\vec{R} \cdot \vec{z} = 0$.

- 3) Liaison verrou ou cylindrique d'axe $(A, \vec{z})$

Définition

Un contact entre les solides (S_1) et (S_2) est une liaison verrou, cylindrique ou pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$ si les seuls mouvements possibles de (S_2) par rapport à (S_1) sont les rotations d'axe $(A, \vec{z})$ et les translations rectilignes de vecteur directeur $\vec{z}$.

On a $[C] = [r\vec{z}, w\vec{z}]$ donc la liaison est parfaite si et seulement si $\vec{R} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0$.

- 4) Liaison rotule ou sphérique et liaison appui plan

Définition

Un contact entre les solides (S_1) et (S_2) est une liaison rotule ou sphérique si les seuls mouvements possibles de (S_2) par rapport à (S_1) sont les rotations autour d'un point fixe dans les deux solides .

On a $[C] = [p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}, \vec{0}]$ et $[\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}] = [\vec{R}, \vec{0}]$ donc la liaison est parfaite.

Définition

Un contact entre les solides (S_1) et (S_2) est une liaison appui plan si les seuls mouvements possibles de (S_2) par rapport à (S_1) sont les mouvements plan sur plan.

On a $[C] = [r\vec{z}, p\vec{x} + q\vec{y}]$ et $[\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}] = [Z\vec{z}, L\vec{x} + M\vec{y}]$ donc la liaison est parfaite.

Chapitre 5

Théorème de l'énergie cinétique