

UNIVERSITÉ DE LOMÉ
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENTS DE MATHS
Semestre 2
UE :
MTH 109
COURS ET EXERCICES
GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Charge de cours : **Prof : Minontikpo Yaovi Awussi**

Maitre de Conférences

jawussi@yahoo.fr

Assistant :

Abalo Douhadji

douhadjiabalo@gmail.com

29 avril 2020

Table des matières

1	ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS	5
1.1	Introduction	5
1.2	Produit scalaire et norme	5
1.2.1	Définitions et exemples	5
1.2.2	Inégalité de Cauchy-Schwartz	7
1.2.3	Bases orthonormées	7
1.2.4	Expression du produit scalaire dans une base orthonormée . .	9
1.2.5	Sous espaces vectoriels orthogonaux	9
1.2.6	Transformations et matrices orthogonales	10
1.3	Produit vectoriel	14
1.3.1	Orientation de l'espace E de dimension n	14
1.3.2	Volume algébrique de n vecteurs	14
1.3.3	Produit vectoriel de deux vecteurs dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3	15
1.3.4	Expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe	16
2	ESPACES AFFINES EUCLIDIENS	17
2.1	Angles et distances	17
2.1.1	Espace affine euclidien	17
2.2	Sous espaces affines orthogonaux	18
2.2.1	Rappel	18
2.2.2	Définitions et propriétés	18
2.2.3	Exemples	19
2.3	Isométries et déplacements	20
2.3.1	Isométries	20
2.3.2	Déplacements	22
2.3.3	Équations d'une isométrie	23
2.3.4	Exemples	23
2.3.5	Isométries dans le plan euclidien	24
2.3.6	Isométries dans l'espace euclidien de dimension 3	25

3	Travaux dirigés	27
3.0.7	Contrôle du cours	27
3.0.8	Activités	29

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

1.1 Introduction

Jusqu'à présent, les notions d'angle et de "longueur d'un vecteur" ont été présentées de façon plus ou moins intuitive. Ces présentations naïves vont maintenant être remplacées par une présentation plus rigoureuse grâce à des outils spécifiques définis dans les espaces vectoriels qui deviennent de ce fait, des espaces vectoriels euclidiens.

1.2 Produit scalaire et norme

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1 *Définition*

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$

On appelle produit scalaire sur E toute application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ possédant les trois propriétés suivantes :

1. *Symétrie : $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$*
2. *Bilinéarité : $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ et $\forall x, y \in E; \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$*
3. *Positivité : $\forall x \in E; f(x, x) \geq 0$, et $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*

Remarque 1.2.1 *La positivité exprime en particulier l'implication $f(x; x) = 0 \Rightarrow x = 0$ dont la réciproque est triviale.*

Par abus de langage, l'image $f(x, y)$ du couple (x, y) est aussi appelé produit scalaire des vecteurs x et y . on le note $x.y$, $(x|y)$ ou $\langle x, y \rangle$

Si f est un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E de dimension finie, alors le couple (E, f) est appelé espace vectoriel euclidien.

Exemple

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , rapporté à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Pour deux vecteurs quelconques $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On pose :

$$f(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On montre que l'application f ainsi définie est un produit scalaire sur E . Il dépend de la base choisie

2. On suppose que $\dim E = 1$. Déterminons tous les produits scalaires sur E . soit (e) une base de E . On a : $x = x_1 e, y = y_1 e$, et $f(x, y) = x_1 y_1 f(e, e) = x_1 y_1 p$

Définition 1.2.2 On appelle norme sur un espace vectoriel réel E , toute application g de E dans $\mathbb{R}$, vérifiant les trois conditions suivantes :

1. $\forall x \in E, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, g(\lambda x) = |\lambda|g(x)$
3. $\forall (x, y) \in E^2, g(x + y) \leq g(x) + g(y)$ (inégalité triangulaire)

Notation : $\|x\| = g(x)$

Théorème 1.2.1 Soit $(E; f)$ un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$ l'application g définie par de E dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in E, g(x) = \sqrt{f(x, x)} \quad (1.1)$$

est une norme sur E appelée norme associée au produit scalaire f , et on a l'égalité :

$$\forall (x, y) \in E^2, [g(x + y)]^2 = [g(x)]^2 + 2f(x, y) + [g(y)]^2 \quad (1.2)$$

Preuve. A faire en exercice par l'étudiant □

En tenant compte des différentes notations introduites, on a :

$$\|x\| = [f(x, x)]^{\frac{1}{2}} = |\langle x, x \rangle|^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

$$2 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \quad (1.4)$$

La norme associée au produit scalaire de l'exemple 1. ci dessus est définie, pour tout vecteur x de E par :

$$\|x\| = \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 1.2.2 Soit (E, f) un espace vectoriel euclidien réel. Pour tout $x, y \in E$, on a $|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y)$, ce qu'on peut encore écrire : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve. Soient $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $y \neq 0$, on a grâce à la bilinéarité et à la symétrie de f :

$$f(x + \lambda y, x + \lambda y) = f(x, x) + 2\lambda f(x, y) + \lambda^2 f(y, y)$$

Le second membre de cette équation est alors un trinôme du second degré en λ , et le premier membre permet de dire que ce trinôme est positif ou nul. Il s'ensuit que son discriminant est négatif ou nul : $\Delta' = [f(x, y)]^2 - f(x, x)f(y, y) \leq 0$. Ce qui donne l'inégalité de Cauchy Schwartz.

Si $y = 0$, l'inégalité de C.S devient triviale puisque ces deux membres sont nuls.

□

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

L'égalité avec $y \neq 0$ implique que le trinôme au second membre de l'inéquation ci dessus s'annule en pour $\lambda_0 = -\frac{f(x, y)}{f(y, y)}$.

On a alors $f(x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y) = 0$ et par conséquent $x + \lambda_0 y = 0$ c'est à dire que les vecteurs x et y sont liés.

Avec $y \neq 0$ les vecteurs x et y sont liés et l'égalité est vraie .

On peut donc énoncer : *Pour que l'inégalité de Cauchy Schwartz donne une égalité, il faut et il suffit que les vecteurs x et y soient liés.*

Définition 1.2.3 On appelle angle de deux vecteurs x et y non nul, le réel $\theta \in [0; \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{f(x, y)}{\|x\| \|y\|} \quad (1.6)$$

Remarque 1.2.2 Cette définition indique une conception selon laquelle l'angle de deux vecteurs x et y est confondu à une de ces mesures bien déterminée (comparer avec la démarche qui introduit l'angle dans l'enseignement secondaire). Toutefois, c'est une définition cohérente dans la démarche en cours.

Avec cette définition le produit scalaire s'exprime : $f(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$.

1.2.3 Bases orthonormées

Définition 1.2.4 On dit que deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien (E, f) sont orthogonaux si leur produit scalaire $f(x, y)$ est nul.

Lorsque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, cette condition équivaut à $\cos \theta = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Définition 1.2.5 Une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de (E, f) est une base orthonormée si elle vérifie :

$$\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f(e_i, e_j) = 0 \text{ si } i \neq j \quad (1.7)$$

Exercice 1.2.1 Montrer que si une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de n vecteurs vérifie les deux conditions de la définition 1.2.5. alors cette famille est une base de E .

Une base orthonormée permet d'exprimer très simplement le produit scalaire de deux vecteurs $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$: $f(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

Théorème 1.2.3 Soit (E, f) un e.v euclidien, et soit F un s.e.v de E de dimension $n - 1$.

Alors, toute base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de F peut être prolongée en une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Preuve. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée. En vertu du théorème de la base incomplète (confère ton cours sur les espaces vectoriels), nous pouvons choisir un vecteur z tel que $(e_1, e_2, \dots, e_n, z)$ soit une base de E . Cette base n'est pas nécessairement orthonormée. Pour la rendre orthonormée, nous allons remplacer z par un vecteur $e_n = z - \lambda_1e_1 - \dots - \lambda_ne_n$. Les coefficients des λ_i qui conviennent sont calculés en prenant les produits scalaires $f(e_n, e_k)$, $k \in \{1; \dots; n\}$. En effet pour un k donné, on a :

$$\begin{aligned} f(e_n, e_k) &= f(z - \lambda_1e_1 - \dots - \lambda_ne_n, e_k) \\ &= f(z, e_k) - \lambda_1f(e_1, e_k) - \dots - \lambda_kf(e_k, e_k) - \dots - \lambda_nf(e_n, e_k) \\ &= f(z, e_k) - \lambda_k \end{aligned}$$

Puisque la base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est orthonormée. Pour rendre la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormée, commençons par imposer à $f(e_n, e_k)$ d'être nul $\forall k \in 1; \dots; n - 1$. on obtient ainsi $\lambda_k = f(z, e_k)$

Il reste maintenant à satisfaire la condition $f(e_n, e_n) = 1$. Puisque $e_n \neq 0$, on a $f(e_n, e_n) = s > 0$.

Il suffit alors de remplacer e_n par $\frac{e_n}{\sqrt{s}}$ pour obtenir la base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{e_n}{\sqrt{s}})$ de E

□

Théorème 1.2.4 Pour tout espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$ sur le corps et pour tout produit scalaire f sur E , il existe une base orthonormée de E .

Preuve. On raisonne par récurrence sur n en utilisant le théorème suivant.
Pour $n=1$, la vérification est immédiate : tout vecteur de norme 1 convient ?
supposons le théorème vrai pour la dimension $n - 1$ et démontrons le pour la dimension n .

soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et F un s.e.v engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$.

Selon l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ orthonormée pour le produit scalaire considéré. D'après le théorème précédent, on peut prolonger cette base en une base orthonormée de E , ce qui démontre le théorème. □

Théorème 1.2.5 Soit E un e.v euclidien et F un sous espace vectoriel quelconque de E de dimension $p \geq 1$.

Toute base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de F peut si $p \leq n - 1$, être prolongée en une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E

Preuve. On construit de proche en proche des bases orthonormées à partir de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$

□

1.2.4 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 1.2.1 Soit (E, f) un espace vectoriel euclidien. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée relativement au produit scalaire f , alors pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ de E on a :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.8)$$

C'est l'expression du produit scalaire dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$

f est appelé le produit scalaire canonique défini par la base $(e_1, \dots, e_n)$

Cette propriété donne un moyen simple de calcul du produit scalaire de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans une base orthonormée quelconque.

En effet pour une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$, $f(e_i, e_i) = 1$ et $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Par conséquent :

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.9)$$

1.2.5 Sous espaces vectoriels orthogonaux

Définition 1.2.6 Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E . On dit que F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

On désigne par $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F . Soit donc $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, f(x, y) = 0\}$

Théorème 1.2.6 L'ensemble $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F est un sous espace vectoriel de E tel que F et $F^\perp$ soient supplémentaires. On a, de plus, $(F^\perp)^\perp = F$

Preuve. Montrons que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Soient x_1, x_2 des éléments de $F^\perp$, et λ_1, λ_2 des réels. pour tout $y \in F$.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y) = 0 \text{ car } f(x_1, y) = f(x_2, y) = 0.$$

d'où $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F^\perp$. Montrons que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Si $F = \{0\}$, on a $F^\perp = E$ et les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

De plus on a $(F^\perp)^\perp = (\{0\}^\perp)^\perp = E^\perp = 0$

Si $p \geq 1$. Considérons une base quelconque $(e_1, \dots, e_p)$ de F . Il est alors facile de montrer que :

$$\forall x \in E, x \in F^\perp \Leftrightarrow f(x, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

Les p relations $f(x, e_i) = 0, 1 \leq i \leq p$ définissent donc $F^\perp$. Déterminons alors $F^\perp$.

En application du théorème 1.2.4 nous pouvons choisir une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$

que nous allons prolonger grâce au théorème 1.2.5 en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$

de E . On a : $x \in F^\perp \Leftrightarrow f(x, e_i) = 0, \forall (i \in \{1, \dots, p\}) \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_p = 0 \Leftrightarrow x = x_{p+1}e_{p+1} + \dots + x_n e_n$

Par conséquent, $F^\perp$ est soit égal à l'ensemble des vecteurs de E de la forme :

$x = x_{p+1}e_{p+1} + \dots + x_n e_n$ si $p \leq n - 1$, soit égal à $\{0\}$ si $p = n$.

Si $p \leq n - 1$, une base de $F^\perp$ est $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Ce qui montre que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Montrons que $(F^\perp)^\perp = F$. posons $G = F^\perp$. On a $F \subset G^\perp$. Puisque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G . De plus $\dim G^\perp + \dim G = \dim E$ d'où $\dim G^\perp = \dim F$ et par conséquent $F = G^\perp$, c'est à dire $(F^\perp)^\perp = F$

□

Définition 1.2.7 *Le sous espace vectoriel $F^\perp$ s'appelle le sous espace vectoriel orthogonal de F*

1.2.6 Transformations et matrices orthogonales

Définition 1.2.8 *Soit (E, f) un espace vectoriel euclidien, et φ une application de E dans E . Les deux applications suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application φ conserve le produit scalaire, c'est à dire :*

$$\forall (x, y) \in E^2, f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y) \quad (1.10)$$

2. *L'application φ est linéaire et conserve la norme : $\forall x \in E, \|\varphi(x)\| = \|x\|$*

Toute application qui satisfait à l'une de ces deux propositions est appelée transformation orthogonale de E .

Preuve. Pour simplifier, nous allons noter $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire $f(x, y)$. Dans le même souci de simplification, le lecteur pourra aussi choisir la notation $x.y$ pour

designer $f(x, y)$. Il adaptera alors la démonstration.

2) $\Rightarrow$ 1) : Soient x et y deux vecteurs quelconques de E . on a :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} [\|\varphi(x) + \varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|\varphi(x + y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

1) $\Rightarrow$ 2) :

- φ conserve la norme : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{f(x, x)} = \sqrt{f(\varphi(x), \varphi(x))} = \|\varphi(x)\|$
- φ est linéaire : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, calculons le nombre :

$$A = \|\varphi(x + \lambda y) - (\varphi(x) + \lambda \varphi(y))\|^2$$

$$\begin{aligned}A &= \|\varphi(x + \lambda y)\|^2 + \|\varphi(x) + \lambda \varphi(y)\|^2 - 2 \langle \varphi(x + \lambda y), \varphi(x) + \lambda \varphi(y) \rangle \\ &= \|\varphi(x + \lambda y)\|^2 + \|\varphi(x)\|^2 + \lambda^2 \|\varphi(y)\|^2 + 2 [\langle \varphi(x), \lambda \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x + \lambda y), \varphi(x) + \lambda \varphi(y) \rangle] \\ &= \|\varphi(x + \lambda y)\|^2 + \|\varphi(x)\|^2 + \lambda^2 \|\varphi(y)\|^2 + 2 [\lambda \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x + \lambda y), \varphi(x) \rangle + \lambda \langle \varphi(x + \lambda y), \varphi(y) \rangle] \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 + 2 [\lambda \langle x, y \rangle - \langle x + \lambda y, x \rangle + \lambda \langle x + \lambda y, y \rangle] \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 + 2(\lambda \langle x, y \rangle) - [\langle x + \lambda y, x \rangle + \lambda \langle x + \lambda y, y \rangle] \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 + 2(\lambda f(x, y)) - 2 [\langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle] \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x + \lambda y\|^2 - 2 \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x + \lambda y\|^2 - 2\|x + \lambda y\|^2\end{aligned}$$

$$A = 0 \text{ d'où } \|\varphi(x + \lambda y) - (\varphi(x) + \lambda \varphi(y))\|^2 = 0 \Rightarrow \varphi(x + \lambda y) - (\varphi(x) + \lambda \varphi(y)) = 0$$

Par suite $\varphi(x + \lambda y) = (\varphi(x) + \lambda \varphi(y))$ □

Théorème 1.2.7 (Propriétés d'une transformations orthogonales)

1. Toute transformation orthogonale de E est bijective
2. Toute transformation orthogonale transforme toute base orthonormée en une base orthonormée
3. Soit φ un endomorphisme de E . Si existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormée de E , alors φ est une transformation orthogonale

Preuve. Soit φ une transformation orthogonale.

1. φ est injective car $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \|\varphi(x)\| = \|x\| = 0$, d'où $x = 0$. Étant un endomorphisme injectif dans un espace vectoriel de dimension finie, φ est bijective.

2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , on a : $\|\varphi(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ et $\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base orthonormée de E .
3. Supposons qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormée de E . Montrons que φ conserve la norme.
Soit x un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i)$.
 $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ étant tous deux des bases orthonormées, on a :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} = \|\varphi(x)\|$$

□

Théorème 1.2.8 Soit $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales de E . $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ est appelé groupe orthogonal de E .

Preuve. • $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car Id_E appartient à $\mathcal{O}(E)$.

• Soient ψ et φ deux éléments quelconques de E .

$\psi \circ \varphi$ est un endomorphisme de E . Montrons qu'elle conserve la norme.

$$\forall x \in E, \|\psi \circ \varphi\| = \|\psi(\varphi(x))\| = \|\varphi(x)\| = \|x\|$$

• Soit φ un élément quelconque de E . φ étant un endomorphisme, il existe une application réciproque φ^{-1} qui est un automorphisme de E . φ^{-1} est une transformation orthogonale car :

$$\forall x \in E, \|\varphi^{-1}(x)\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(x))\| = \|x\| \quad (1.11)$$

□

Définition 1.2.9 On appelle matrice orthogonale de type (n, n) sur $\mathbb{R}$ la matrice d'une transformation orthogonale d'un espace vectoriel E de dimension n , relativement à une base orthonormée de E .

Proposition 1.2.2 Pour qu'une matrice M de type (n, n) sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'égalité matricielle :

$${}^t M M = I \quad (1.12)$$

où ${}^t M$ désigne la matrice transposée de M

Preuve. Dans un espace vectoriel euclidien E donné, fixons le produit scalaire f , une base orthonormée et la transformation orthogonale φ de matrice M dans cette

base . Pour deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, le produit scalaire s'exprime :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.13)$$

qui s'écrit matriciellement : $f(x, y) = {}^tXY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont

les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y respectivement, et tX désigne le vecteur ligne $(x_1, \dots, x_n)$ transposé du vecteur colonne X . Les images par φ des vecteurs x et y ont pour coordonnées les vecteurs colonnes MX et MY et leur produit scalaire est égal à :

$f(\varphi(x), \varphi(y)) = {}^t(MX)MY = {}^tX({}^tMM)Y$ Puisque φ conserve le produit scalaire, on a, pour tout X et Y , ${}^tX({}^tMM)Y = {}^tXY$ c'est à dire ${}^tX({}^tMM - I)Y = 0$. En appliquant cette condition aux vecteurs e_i et e_j de la base orthonormée, il vient :

$${}^tMM - I = 0$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, l'application φ de matrice M conserve le produit scalaire donc M est une matrice orthogonale. $\square$

Définition 1.2.10 *L'ensemble des matrices orthogonales de type (n, n) , muni de la multiplication des matrices, est un groupe isomorphe au groupe $\mathcal{O}(E)$ des transformations orthogonales de E .*

Ce groupe, noté $\mathcal{O}(n)$, est appelé le groupe orthogonal de dimension n sur $\mathbb{R}$

Cela résulte directement de la correspondance biunivoque entre les applications linéaires de E dans lui-même et leurs matrices par rapport à une base choisie dans E .

Théorème 1.2.9 *Le déterminant d'une transformation (resp. d'une matrice) orthogonale est égal à $+1$ ou à -1 .*

Les transformations (resp. matrices) orthogonales de déterminant $+1$ forment un sous groupe du groupe des transformations (resp. des matrices) orthogonales, noté $SO(E)$ (resp. $SO(n)$) et appelé sous groupes des rotations

Preuve. Soit M une matrice orthogonale, on a :

$$\begin{aligned} {}^tMM &= I \\ \det({}^tMM) &= 1 \\ \det({}^tM)\det(M) &= 1 \\ (\det(M))^2 &= 1 \Leftrightarrow \det M = 1 \text{ ou } \det M = -1 \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.2.3 $SO(E)$, (resp. $SO(n)$) se dit "groupe special orthogonal" de E (resp. n). Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$ (resp. $\mathcal{O}^+(n)$)

L'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ (resp. $\mathcal{O}^-(n)$) des transformations (resp. matrices) orthogonales de détermination -1 ne forme pas un groupe. C'est l'ensemble des transformations orthogonales négatives (ou indirectes).

Exercice 1.2.2 Étudier les groupes $SO(2)$ et $SO(3)$

1.3 Produit vectoriel

1.3.1 Orientation de l'espace E de dimension n

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Considérons les trois bases suivantes de E :

$$e = (e_1, \dots, e_n) \quad f = (f_1, \dots, f_n) \quad g = (g_1, \dots, g_n)$$

On sait que

$$\det_e(g_1, \dots, g_n) = \det_e(f_1, \dots, f_n) \times \det_f(g_1, \dots, g_n) \quad (1.14)$$

On définit dans l'ensemble des bases de E la relation $\mathcal{R}$ par : $e \mathcal{R} f \Leftrightarrow \det_e(f_1, \dots, f_n) > 0$.

Exercice 1.3.1 Vérifier à l'aide de la relation (1.14) que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence qui n'a que deux classes d'équivalence.

On peut définir une orientation sur l'ensemble des bases de E de la manière suivante :

Définition 1.3.1 Deux bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ $f = (f_1, \dots, f_n)$ d'un même espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$ ont la même orientation si $\det_e(f_1, \dots, f_n) > 0$ et l'on a : Si f et e ont des orientations différentes ainsi que g et e , alors f et g ont la même orientation.

Un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$ est orienté si l'on choisit l'une des deux orientations comme positive (ou directe).

Remarque 1.3.1 Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$; alors $\det_e(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est égale à la signature de σ . Par conséquent, l'orientation ne change pas si et seulement si la permutation σ est paire

1.3.2 Volume algébrique de n vecteurs

Théorème 1.3.1 Étant données une suite de n vecteurs $U_1, \dots, U_n$ et une base orthonormée directe d'un espace vectoriel de dimension n , le déterminant $\det_e(U_1, \dots, U_n)$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

Ce déterminant noté plus simplement $\det_e(U_1, \dots, U_n)$ s'appelle le volume algébrique des vecteurs $U_1, \dots, U_n$

Preuve. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base orthonormée directe de E

Alors, on a $\det_e(U_1, \dots, U_n) = \det_f(U_1, \dots, U_n) \det_e(f_1, \dots, f_n)$ et il nous suffit de montrer que $\det_e(f_1, \dots, f_n) = 1$

Considérons à cet effet l'endomorphisme ρ de E défini par $\rho(e_i) = f_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$. ρ est une transformation orthogonale, puisqu'il transforme une base orthonormée en une base orthonormée; on a donc $\det \rho = \pm 1$. Or $\det \rho > 0$ puisque e et f , ont la même orientation. D'où $\det \rho = 1$ $\square$

1.3.3 Produit vectoriel de deux vecteurs dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3

Dans toute la suite, l'espace vectoriel E de dimension 3 et le produit scalaire sur E est noté $x.y$ au lieu de $f(x, y)$

considérons le volume algébrique de trois vecteurs U, V, W . Ce volume, défini comme étant égal à $\det(U, V, W)$, possède les propriétés d'un déterminant. En l'occurrence, c'est une forme tri-linéaire alternée des trois vecteurs U, V, W qui prend la valeur 1 pour les vecteurs e_1, e_2, e_3 d'une base orthonormée directe.

Si l'on fixe les deux vecteurs U et V , l'application $l : W \mapsto \det(U, V, W)$ est une forme linéaire définie sur E que nous pouvons exprimer sous forme de produit scalaire grâce au lemme ci-après :

Théorème 1.3.2 (Lemme) *Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Il existe un vecteur A de E et un seul tel que $l(X) = X.A$, pour tout X dans E*

Preuve. Nous faisons la démonstration pour $n = 3$. L'étudiant pourra généraliser. Considérons une base e_1, e_2, e_3 de E et exprimons X dans cette base comme suit : $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Alors

$$l(X) = x_1 l(e_1) + x_2 l(e_2) + x_3 l(e_3) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \quad (1.15)$$

avec $a_i = l(e_i)$, $i = 1, 2, 3$. En posant $A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, le produit scalaire $A.X$ est bien égal à $l(X)$, pour tout $X \in E$

Le vecteur A ainsi défini est unique. En effet

$$\begin{aligned} \forall X \in E, A.X = B.X &\Leftrightarrow \forall X \in E, (A - B).X = 0 \\ &\Rightarrow (A - B).(A - B) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|A - B\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow A - B = 0 \\ &\Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

On a donc $(\forall X \in E, A.X = B.X) \Rightarrow A = B$

$\square$

Appliquons ce lemme à la forme linéaire $l : \rightarrow \det(U, V, W)$, U et V étant fixés. Il reste un unique vecteur A tel que :

$$\det(U, V, W) = A.W \quad W \in E$$

Par définition le vecteur A s'appelle le produit vectoriel de U et V et se note $U \wedge V$. On a donc

$$\det(U, V, W) = (U \wedge V).W \quad (1.16)$$

1.3.4 Expression du produit vectoriel dans une base ortho-normée directe

Posons $U = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $V = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ et cherchons les coordonnées du produit vectoriel : $U \wedge V = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$

En prenant $W = e_1$ dans (1.16), on a :

$$X = \begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = yz' - zy' \quad (1.17)$$

$$Y = \begin{vmatrix} x & x' & 0 \\ y & y' & 1 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = zx' - xz' \quad (1.18)$$

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = xy' - yx' \quad (1.19)$$

En particulier $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$

Proposition 1.3.1 *L'opération $U \wedge V$ possède les propriétés suivantes :*

1. *Elle est bilinéaire :*

$$\forall U_1, U_2, V \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, (\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2) \wedge V = \lambda_1 U_1 \wedge V + \lambda_2 U_2 \wedge V$$

2. $\forall U, V_1, V_2 \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, U \wedge (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) = \lambda_1 U \wedge V_1 + \lambda_2 U \wedge V_2$

3. *elle est antisymétrique : $\forall U, V \in E, U \wedge V = -V \wedge U$*

Exercice 1.3.2 *Démontrer les propriétés précédentes*

Théorème 1.3.3 1. $U \wedge V = 0$ si et seulement si $U = 0$ ou $V = 0$ ou $V = \lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Si U et V ne sont ni nuls ni proportionnels, $(U, V, U \wedge V)$ forme une base directe de E , le vecteur $U \wedge V$ étant orthogonal à U et à V

3. $\|U \wedge V\| = \|U\|\|V\|\sin\theta$ où $\theta \in [0; \pi]$ est l'angle des deux vecteurs U et V supposés non nuls.

Chapitre 2

ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

2.1 Angles et distances

2.1.1 Espace affine euclidien

Définition 2.1.1 *Un espace affine euclidien est un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension finie associé à un espace vectoriel euclidien.*

Définition 2.1.2 *On appelle distance sur ensemble $\mathcal{E}$ une application d de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ qui a les propriétés suivantes :*

1. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in \mathcal{E}$
3. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C), \forall A, B, C \in \mathcal{E}$

Théorème 2.1.1 *Sur un espace euclidien $\mathcal{E}$, l'application*

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (A, B) &\mapsto \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

est une distance.

Ces propriétés résultent immédiatement des définitions du produit scalaire et de la norme associée, ainsi que du théorème 1.2.1 Dans 3., l'égalité est réalisée si et seulement si le point B appartient au segment $[AC]$. L'inégalité triangulaire exprime donc que, dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ " la droite est le plus court chemin entre deux points".

Définition 2.1.3 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien associée à un espace vectoriel euclidien E . Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$, A étant distinct de B et C . L'angle*

$\widehat{ABC}$ est par définition, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est à dire l'angle $\theta \in [0, \pi]$ défini par :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} \quad (2.2)$$

Définition 2.1.4 Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension n . O un point $\mathcal{E}$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de l'e.v E associé à $\mathcal{E}$.

Le repère $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée si la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ l'est.

2.2 Sous espaces affines orthogonaux

2.2.1 Rappel

Rappelons (Cf MTH 108, Chapitre 1) qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ si l'ensemble $F = \{\overrightarrow{MN}, M, N \in \mathcal{F}\}$ est un sous espace vectoriel de E et si $\mathcal{F}$ est espace affine associé à F

Cette définition se résume comme suit :

1. $\forall M, N \in \mathcal{F}, \overrightarrow{MN} \in F$
2. $M \in \mathcal{F}, \forall v \in F, \exists N$ tel que $\overrightarrow{MN} = v$

Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et si $A \in \mathcal{F}$, alors pour que $\mathcal{F}$ soit un sous espace affine de direction F , il faut et il suffit que $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$

Les sous espaces affines de $\mathcal{E}$ différents de $\emptyset$ et $\mathcal{E}$ sont appelés sous espaces affines propres de $\mathcal{E}$

2.2.2 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines propres de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux si leurs directions F et G sont deux sous espaces vectoriels orthogonaux de l'espace vectoriel euclidien E , c'est à dire si pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{F}$ et pour tout couple C, D de points de $\mathcal{G}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

Définition 2.2.2 Soit $\mathcal{G}$ un s.e.a de l'espace euclidien $\mathcal{E}$, de direction G , et A un point de $\mathcal{G}$.

On appelle s.e.a maximal contenant A et orthogonal à $\mathcal{G}$ le s.e.a noté $\mathcal{G}_0$ contenant A et de direction $G^\perp$

Définition 2.2.3 Deux sous espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de directions F et G sont dits perpendiculaires si les sous espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux.

Remarque 2.2.1 L'orthogonalité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ équivaut à la condition ($F \subset G^\perp$ ou $G \subset F^\perp$), tandis que la perpendicularité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ équivaut à ($F \supset G^\perp$ ou $G \supset F^\perp$). Ces deux notions sont donc distinctes; cependant, elles se confondent dans le cas particulier où l'un des sous espaces affines est une droite ($\dim \mathcal{F} = 1$) et l'autre un hyperplan ($\dim \mathcal{G} = n - 1$)

Proposition 2.2.1 Dans un espace euclidien de dimension $n > 1$, une droite et un hyperplan orthogonaux (ou perpendiculaires) ont un point commun et un seul.

Preuve. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ une droite et un hyperplan orthogonaux de directions respectives F et G , $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de F , A un point $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{G}$. Un point M est commun à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{G}$ si et seulement si ($\vec{AM} = \rho \vec{u}$, $\rho \in \mathbb{R}$) et $\vec{u} \cdot \vec{BM} = 0$ c'est à dire $\vec{u} \cdot (\vec{BA} + \rho \vec{u}) = 0$. Cette équation a une solution unique $\rho = \vec{u} \cdot \vec{AB}$ $\square$

2.2.3 Exemples

cas où $\mathcal{E}$ est de dimension 2 (plan euclidien)

Les seuls sous espaces affines propres de $\mathcal{E}$ sont les droites (dimension 1). Une droite étant considérée comme un hyperplan de $\mathcal{E}$, les notions de droites orthogonales et de droites perpendiculaires sont ici confondues.

Soit une droite de $\mathcal{G}$ de direction G . le sous espace vectoriel $G_0 = G^\perp$ étant de dimension 1, tout sous espace affine maximal de $\mathcal{E}$ orthogonal à la droite de $\mathcal{G}$ est une droite de direction G_0 et il n'y a pas d'autres sous espaces affine propre orthogonal orthogonal à la droite de $\mathcal{G}$. Donc par un point A , il passe une et une seule de ces droites. On l'appelle la perpendiculaire à la droite de $\mathcal{G}$ menée par A .

Soit A un point de $\mathcal{E}$ et H le point commun à la droite de $\mathcal{G}$ et à la perpendiculaire à la droite de $\mathcal{G}$ menée par A . L'application $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ définie par $\pi(A) = H$ est une application affine (à vérifier). On l'appelle la projection orthogonale sur la droite de $\mathcal{G}$

Remarque 2.2.2 Le point H minimise la distance de A aux points de la droite $\mathcal{G}$. AH est donc la distance du point A à la droite de $\mathcal{G}$

Cas où $\mathcal{E}$ est de dimension 3

Les seuls sous espaces affines propres de $\mathcal{E}$ sont **les droites et les plans**. deux droites sont orthogonales si et ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles peuvent ne pas avoir de point commun. Deux droites de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne peuvent être perpendiculaires; En effet le sous espace vectoriel F est de dimension 1 et ne peut contenir $G^\perp$ qui est de dimension 2.

Une droite et un plan sont orthogonaux si et ssi ils sont perpendiculaires.

Soit $\mathcal{G}$ un plan de direction G . L'orthogonal $G_0 = G^\perp$ de $\mathcal{G}$ est de dimension 1. Les sous espaces affines maximum orthogonaux à $\mathcal{G}$ sont donc les droites de direction G_0 et ce sont les seuls sous espace affines orthogonaux de G . Par un point A de $\mathcal{E}$ il passe une et une seule de ces droites appelée perpendiculaire au plan $\mathcal{G}$ menée par A .

Soit A un point de $\mathcal{E}$ et H le point commun à $\mathcal{G}$ et à la perpendiculaire à $\mathcal{G}$ menée par A . L'application $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ définie par $\pi(A) = H$ est une application affine. On l'appelle la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{G}$. comme dans le cas traité ci dessus , on vérifie aisément que AH est le minimum de la distance de A à un point quelconque de G . on l'appelle la distance de A au plan G .

Maintenant, soit $\mathcal{G}$ une droite de direction de G . Le sous espace vectoriel $G_0 = G^\perp$ est de dimension 2. Les sous espaces affines maximaux orthogonaux à $\mathcal{G}$ sont les plans affines de direction G_0 (donc perpendiculaires à $\mathcal{G}$). Par un point A donné ,il passe un et un seul de ces plans. On l'appelle le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{G}$ mené par A . La projection orthogonale sur la droite $\mathcal{G}$ est défini comme étant l'application $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui à un point quelconque de $\mathcal{E}$ associe l'unique point commun à la droite $\mathcal{G}$ et au plan perpendiculaire à $\mathcal{G}$ mené par A . $\pi(A) = H$ minimise la distance de A à la droite $\mathcal{G}$.

Deux plans ne peuvent être orthogonaux, mais ils peuvent être perpendiculaires.

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D . Si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{G}$ et si $\mathcal{F}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$, on $G^\perp = D \subset F$ et le plans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont perpendiculaires. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux plans perpendiculaires. A un point de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ la perpendiculaire à $\mathcal{G}$ menée par A . $D = G^\perp \subset F$, d'où $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. Le point H commun à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{G}$ est commun à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. De plus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont distincts puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ ont un seul point commun. On en déduit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ se coupent suivant une droite.

2.3 Isométries et déplacements

2.3.1 Isométries

Définition 2.3.1 On appelle isométrie d'un espace euclidien $\mathcal{E}$ toute application φ de $\mathcal{E}$ dans lui même qui conserve la distance :

$$\forall P, Q \in \mathcal{E}, d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q) \quad (2.3)$$

Théorème 2.3.1 Une isométrie de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ (de dimension finie) est une transformation affine de $\mathcal{E}$

Preuve. Soit φ une isométrie $\mathcal{E}$, O , P et Q trois points de $\mathcal{E}$.
Posons : $O' = \varphi(O)$, $P' = \varphi(P)$, $Q' = \varphi(Q)$

On a par définition $|O'P'| = |OP|$, $|O'Q'| = |OQ|$, $|P'Q'| = |PQ|$.

D'autre part $2\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |OP|^2 + |OQ|^2 - |PQ|^2$. On le voit en écrivant $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ et en développant $|\vec{PQ}|^2 = |\vec{OQ} - \vec{OP}|^2$.

De même $2\vec{O'P'} \cdot \vec{O'Q'} = |O'P'|^2 + |O'Q'|^2 - |P'Q'|^2$

Il en résulte que $2\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 2\vec{O'P'} \cdot \vec{O'Q'}$ car si φ conserve les longueurs, il conserve les produits scalaires.

Montrons que φ est une application affine.

Soit $(O; \vec{OA_1}; \vec{OA_2}; \dots; \vec{OA_n})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ et $O' = \varphi(O)$; $A'_1 = \varphi(A_1)$; $\dots$; $A'_n = \varphi(A_n)$.

L'invariance des longueurs et des produits scalaires entraîne :

$|\vec{OA'_1}| = |\vec{OA_1}| = 1$; $\dots$; $|\vec{OA'_n}| = |\vec{OA_n}| = 1$ et si

$j \neq k$; $\vec{OA'_j} \cdot \vec{OA'_k} = |\vec{OA_j}| \times |\vec{OA_k}| = 0$ car $(O; \vec{OA_1}; \vec{OA_2}; \dots; \vec{OA_n})$ un repère orthonormé.

Soit $\vec{OM} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{OA_j}$; $M' = \varphi(M)$; $\vec{OM'} = \sum_{j=1}^n x'_j \vec{OA'_j}$

Comme $x_j = \vec{OM} \cdot \vec{OA_j} = \vec{OM'} \cdot \vec{OA'_j} = x'_j$

φ est définie par les formules :

$$x'_j = x_j \quad j = 1; 2; \dots; n$$

L'application φ est une application affine et comme c'est une isométrie, elle est bijective et par conséquent est une transformation affine.

□

Remarque 2.3.1 La démonstration fait apparaître qu'une isométrie conserve le produit scalaire et par conséquent les angles : $\widehat{P'O'Q'} = \widehat{POQ}$

En particulier l'image d'un repère orthonormé par φ est un repère orthonormé

Théorème 2.3.2 (corolaire) Le produit de deux isométries est une isométrie.

Si φ est une isométrie alors φ^{-1}

Les isométries de l'espace euclidien de dimension n forme donc un groupe : Nous l'appellerons le groupe des isométries et le désignerons par $I(E)$

Si E et F sont deux espaces euclidiens de même dimension n , On désigne par $(O, \vec{e_1}; \dots; \vec{e_n} = \mathcal{R}$ un repère orthonormé de E et par $(O', \vec{f_1}; \dots; \vec{f_n} = \mathcal{R}'$ un repère orthonormé de F .

Soit $T : E \rightarrow F$ l'application qui tout point $M(x_1; \dots; x_n)$ dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de F dont les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ sont : $x'_1 = x_1, \dots, x'_n = x_n$.

Alors T est une bijection qui conserve les distances et les produits scalaires.

Soit $\varphi \in I(E)$; définissons ψ par la condition que $\psi(M') = N'$ et $M' = T(M)$; $N' = T(N)$ et $N = \varphi(M)$.

ψ est une isométrie de F . On a $\psi = T \circ \varphi \circ T^{-1}$ l'application $\varphi \mapsto \psi$ de $I(E)$ dans $I(F)$ est un isomorphisme de groupes. (Vérification laissée à l'étudiant)

Le groupe des isométries d'un espace euclidien de dimension n est donc isomorphe au groupe $\mathcal{I}_n$ des isométries de l'espace euclidien $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, muni de sa structure euclidienne canonique.

2.3.2 Déplacements

Soit φ une isométrie d'un espace euclidien E . Appelons X l'espace vectoriel associé à E et $\tilde{\varphi}$ l'application linéaire associée à φ alors $\tilde{\varphi}$ est une transformation orthogonale de l'espace vectoriel euclidien X (réciproquement si φ est une application affine de E telle que $\tilde{\varphi}$ est une transformation orthogonale de X , alors φ est une isométrie de E .)

Ces remarques conduisent à la définition suivante :

Définition 2.3.2 *L'isométrie φ est appelée déplacement si le déterminant de $\tilde{\varphi} = 1$. On dit aussi que φ est une isométrie positive ou directe. Dans le cas où déterminant $\tilde{\varphi} = -1$, on parle d'isométrie négative ou indirecte ou antidéplacement.*

Désignons par $D(E)$ l'ensemble des déplacements d'un espace euclidien E de dimension finie n .

Comme nous l'avons fait pour les isométries, on vérifie sans difficulté que $D(E)$ est un groupe et que si E et F sont deux espaces euclidiens de même dimension n , $D(E)$ et $D(F)$ sont deux groupes isomorphes.

En particulier $D(E)$ est isomorphe au groupe noté D_n des déplacements de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, muni de sa structure euclidienne canonique.

Définition 2.3.3 *Un repère $(O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ de E est dit d'orientation positive (ou directe) si $(\overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ est une base de l'espace vectoriel X . Il est dit d'orientation négative (ou indirecte) dans le cas contraire.*

Proposition 2.3.1 *Soit $(O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ et $(O; \overrightarrow{OB_1}; \dots, \overrightarrow{OB_n})$ deux repères ortho-normés de l'espace euclidien E .*

Pour que ces deux repères aient même orientation il faut et il suffit qu'il existe un déplacement transformant le premier en le second.

Appelons $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les deux repères. Il existe une transformation affine et une seule transformant $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$, elle est définie par : $\varphi(O) = O$ et par l'application linéaire associée $\tilde{\varphi}$ de X dans X telle que $\tilde{\varphi}(\overrightarrow{OA_i}) = \overrightarrow{OB_i}, i = 1; \dots; n$. est une transformation orthogonale. Pour que les deux bases aient la même orientation, il faut et il suffit que $\tilde{\varphi}$ soit une transformation orthogonale directe (ou rotation).

2.3.3 Équations d'une isométrie

Soit $(O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ un repère orthonormé de l'espace euclidien. Si φ est une isométrie de E et $\tilde{\varphi}$ la transformation orthogonale de l'espace vectoriel euclidien X, associé à φ la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base orthonormée $(O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ est une matrice orthogonale $A \in O(n)$. En posant : $O' = \tilde{\varphi}(O)$ et $M' = \tilde{\varphi}(M)$

$$\overrightarrow{OM'} = \tilde{\varphi}(\overrightarrow{OM}) + \overrightarrow{OO'} \quad (2.4)$$

On en déduit les equations de φ

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$a_1; \dots; a_n$ sont les coordonnées de O'

Les équations d'un déplacement s'obtiennent aussi de façon analogue au (2.4; 2.5) en prenant $A \in SO(n)$

2.3.4 Exemples

1. Une translation est un déplacement.
2. Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. $H \subset E$ un sous espace affine de dimension $n - 1$ hyperplan affine et T une isométrie de E laissant invariants tous les point de H. Soit $\mathcal{R}$ un R.O.N $((O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n}))$ tels que $O, A_1, \dots, A_{n-1} \in H$ Posons $A'_n = T(A_n)$. Puisque $O, A_1, \dots, A_{n-1}$ sont invariants par T , on doit avoir $|\overrightarrow{OA'_n}| = 1$ et $\overrightarrow{OA'_n} \cdot \overrightarrow{OA_i} = 0$ si $1 \leq i \leq n - 1$. IL n'y a que deux possibilités : $A'_n = A_n$ ou $\overrightarrow{OA'_n} = -\overrightarrow{OA_n}$.
Si $A'_n = A_n$ alors T est l'identité. Supposons $\overrightarrow{OA'_n} = -\overrightarrow{OA_n}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Les equations de T s'écrivent :

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2; \dots; x'_n = x_n \text{ où } M'(x'_1; \dots; x'_n) = T(M(x_1; \dots; x_n))$$

Réciproquement une transformation affine de E définie par ces équations dans le repère $\mathcal{R}$ est une isométrie de E qui laisse invariants tous les éléments de H. Cette isométrie est appelée symétrie par rapport à l'hyperplan H. Remarquons que la transformation orthogonale $\tilde{T}$ de l'espace vectoriel euclidien X, associée à T est symétrie par rapport à l'hyperplan vectoriel $\tilde{H}$, direction de H. Une symétrie T par rapport à un hyperplan de E est un antidéplacement. Elle est involutive : $T^2 = I$

3. Soit E un espace euclidien de dimension $n > 1$. D une droite de E et $T : E \rightarrow E$ l'application définie par $T(M) = M'$ si $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la droite vectorielle $\tilde{D}$ associé à D et si le milieu I de $[MM']$ appartient à D. M' est donc

définie par $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$ où I est la projection orthogonale de M sur D . elle laisse invariants les points de D

Pour vérifier qu'il s'agit d'une isométrie de E . Choisissons un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA_1}; \dots, \overrightarrow{OA_n})$ tel que $O, A_n \in D$.

Alors si $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \overrightarrow{OA_i} + x_n \overrightarrow{OA_n}$ et si $T(M) = M'$, on a :

$$\overrightarrow{OM'} = - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \overrightarrow{OA_i} + x_n \overrightarrow{OA_n}$$

car $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OI} \in \tilde{D}$ et $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \in \tilde{D}^\perp$. On en déduit les équations de T :

$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2; \dots; x'_n = x_n$ qui sont bien les équations d'une isométrie.

Le déterminant de la transformation orthogonale $\tilde{T}$ associée à T vaut $(-1)^{n-1}$. T est un déplacement si et ssi n est impair. Une symétrie T par rapport à une droite D est involutive : $T^2 = I$

L'étude des isométries d'un espace euclidien E laissant invariant un point de E est identique à celle des transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien.

2.3.5 Isométries dans le plan euclidien

Déplacements

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la transformation orthogonale $\tilde{\varphi}$ du plan vectoriel euclidien associé au déplacement φ est une rotation (transformation orthogonale directe). Les équations de φ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; a et b désignent les coordonnées de $O' = \varphi(O)$

Si θ est l'angle de la rotation on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Si $\theta = 2k\pi$, φ est l'identité.

Si $\theta = \pi$, φ est la symétrie centrale.

Si φ n'admet pas de point invariant, alors l'équation devient :

$$x' = x + a; y' = y + b \quad (2.8)$$

et φ est une translation de vecteur de $\overrightarrow{OO'} \neq 0$

Proposition 2.3.2 *Dans le plan euclidien, un déplacement qui laisse invariant un point O est une rotation de centre O et un déplacement sans point invariant est une translation de vecteur non nul.*

antidéplacements

La transformation orthogonale indirecte $\tilde{\varphi}$ associée à l'antidéplacement φ est une symétrie par rapport à la droite vectorielle $\tilde{\Delta}$, ensemble des vecteurs invariant par $\tilde{\varphi}$. Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée du plan vectoriel euclidien telle que $\vec{i} \in \tilde{\Delta}$. Les équations de φ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sont :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

a et b désignent les coordonnées de $O' = \varphi(O)$

♠ Si φ admet un point invariant O , l'équation précédente devient :
 $x' = x$ et $y' = -y$

♠ Si φ n'admet pas de point invariant alors φ est la composée d'une symétrie d'axe $\tilde{\Delta}$ menée par O et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$:
 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + (b - 2y)\vec{j}$

Les points M cherchés sont les points de la droite Δ d'équation $y = \frac{b}{2}$

♠ Si $O \in \Delta$ et donc $\overrightarrow{OO'} \in \delta$; l'équation devient :
 $x' = x + a$ et $y' = -y$

Proposition 2.3.3 *Un antidéplacement qui laisse invariant un point O est une symétrie par rapport à une droite Δ passant par O*

Un antidéplacement sans point invariant est le produit commutatif d'une symétrie par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur non nul parallèle à l'axe Δ de la symétrie. (décomposition unique).

2.3.6 Isométries dans l'espace euclidien de dimension 3

Dans les conditions similaires au cas précédent :
On choisit un R.O.N $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ tel que $\vec{k} \in \Delta$; $a; b; c$ les coordonnées de $O' = \varphi(O)$.
Les équations de φ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

♣ Si φ laisse un point invariant, on le choisit $O(a = b = c = 0)$ alors φ est une rotation d'axe Δ (ensemble des points invariants) menée par O .

♣ Si θ est l'angle de la rotation; on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

♣ Si φ n'admet pas de point invariant :
 $x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y; \quad z' = z + c \quad c \neq 0$

Proposition 2.3.4 *En dimension 3 ;*

Un déplacement qui laisse un point invariant O est une rotation d'axe Δ passant par O :

Un déplacement sans point invariant est soit une translation, soit le produit commutatif d'une rotation d'axe Δ et d'une translation de vecteur non nul parallèle à l'axe Δ de la rotation

Chapitre 3

Travaux dirigés

3.0.7 Contrôle du cours

Soit E un espace vectoriel euclidien. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

Exercice 3.0.1 Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$ alors :

1. $B^\perp \subset A^\perp$
2. $A^\perp \subset B^\perp$
3. $A \subset B^\perp$
4. 1. et 2.
5. aucune bonne réponse

Exercice 3.0.2 Soient A et B deux parties de E telles que $B^\perp \subset A^\perp$ donc

1. $A \subset B$
2. $\text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$
3. aucune réponse

Exercice 3.0.3 Soient trois vecteurs $\vec{U} = (1; -1; 1); \vec{V} = (3; 1; -3); \vec{W} = (3; 5; 9)$ de $\mathbb{R}^3$

Lesquelles des assertions suivantes sont fausses :

1. $U \wedge V = (2; 6; 4)$ et $U \wedge W = (4; 12; 8)$
2. les trois vecteurs appartiennent au plan orthogonal à $(1; 3; 2)$
3. $U \wedge V = (2; 3; 4)$ et $U \wedge W = 2U \wedge V$
4. toutes les trois réponses

Exercice 3.0.4 L'espace R^n étant muni du produit scalaire, soit $A \in M_n(R)$ X et Y deux vecteurs de R^n

1. $f(X, AY) = f({}^tAX, Y)$
2. $f(X, AY) = f(AX, Y)$
3. $f(X, AX) = 0$ pour tout $X \in R^n$ si et seulement si $A + {}^tA = 0$

Exercice 3.0.5 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme si et seulement si

1. Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ ont même norme.
2. Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
3. 1 et 2
4. aucune réponse

Exercice 3.0.6 Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E . Donc

1. $(F + G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
2. $(F \cup G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
3. $(F + G)^\perp = F^\perp \cup G^\perp$

Exercice 3.0.7 Soit E un e.v.e orienté de dimension 3.

Choisir les bonnes affirmations

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})$
2. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})$
3. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = 0$ alors le système $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ est lié.
4. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \|\vec{w} \wedge \vec{v}\|^2$
5. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ alors $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$
6. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

Exercice 3.0.8 Soit E un e.v.e orienté de dimension $n > 2$, $(e_1; \dots; e_n)$, une base orthonormée de E

Choisir les mauvaises assertions

1. Si une famille $(v_1; \dots; v_n)$ de vecteurs de E est orthogonale, alors $m \leq n$
2. Si une famille $(v_1; \dots; v_n)$ de vecteurs de E est orthonormée, alors $m \leq n$
3. Si une famille $(v_1; \dots; v_n)$ de vecteurs de E est orthonormée, alors c'est une base de E .
4. Si une famille $(v_1; \dots; v_n, v_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E est orthogonale, alors au moins un de ces vecteurs est nul
5. Si $\vec{u}$ est un vecteur orthogonal $(e_1; \dots; e_n)$ alors $\vec{u}$ est nul

3.0.8 Activités

Exercice 3.0.9 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit u un endomorphisme orthogonal de E .

Démontrer que si u est involutive alors il existe un sous espace vectoriel F de E tel que pour tout $\vec{x} \in F$, $\vec{x} = u(\vec{x})$, tel que pour tout $\vec{x} \in F^\perp$, on a $\vec{x} = -u(\vec{x})$

Exercice 3.0.10 Soit a, b deux réels. E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

Pour chaque couple (a, b) , on considère l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} a-1 & -2a \\ 2ab & b(a-1) \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ qui sont des isométries vectorielles. En préciser la nature et les éléments caractéristiques.

Exercice 3.0.11 Soit N l'application définie sur $L^2(G)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur G par :

$$N(f) = \left(\int_G f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme.

Exercice 3.0.12 Dans le plan affine réel euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ et la rotation r de centre S et de mesure θ donnés. Reconnaitre la nature géométrique de l'application $T^{-1} \circ r \circ T = \varphi$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 3.0.13 Soient D et D' deux droites et A un point de D et A' un point de D'

Démontrer qu'il existe deux déplacements qui transforment A en A' et D en D'

Exercice 3.0.14 On considère l'application affine f telle que $f(O) = I, f(I) = J, f(J) = O$ dans un R.O.N $(O; I; J)$

1. Démontrer que f est bijective.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

Exercice 3.0.15 Soit $ABCD$ un losange et O son centre.

1. Déterminer toutes les isométries laissant invariant $ABCD$

2. Établir la table de composition de ces isométries

Exercice 3.0.16 Soit $\vec{u} = (2, 1, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 3, 2)$ deux vecteurs dans une base orthonormée directe. Calculer :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v}; (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}$
3. $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}); \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
4. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v})$

Bibliographie

- [1] AZIZ EL KACIMI : *Géométrie euclidienne élémentaire*
- [2] G.MATTHIEU : *Géométrie euclidienne classique*
- [3] MPSI 1ere année : *Algèbre et géométrie euclidienne*
- [4] A. DOUHADJI et Y. AWUSSI