

Cours analyse I

LOUDANI Mustapha
Université Internationale de Rabat,
Ecole Supérieure d'Informatique et du Numérique

22 septembre 2020

Table des matières

1	Sommes et produits finis	3
2	Topologie de la droite réelle	6
2.1	Introduction	6
2.2	Construction de $\mathbb{R}$	6
2.3	Propriétés de $\mathbb{R}$	8
2.3.1	Addition et multiplication	8
2.3.2	Ordre sur $\mathbb{R}$	8
2.3.3	Propriété d'Archimède et partie entière	9
2.4	La valeur absolue	10
2.5	Majorants, minorants et borne supérieure	11
2.6	Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	12
2.7	Intervalles de $\mathbb{R}$	12
2.8	Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$	13
2.9	Compact de $\mathbb{R}$	15
3	Suites numériques	16
3.1	Généralités	16
3.2	Suites convergentes	17
3.3	Opérations sur les suites convergentes	19
3.4	Critères de convergence	22
3.5	Suites adjacentes	24
3.6	Suites de Cauchy	25
3.7	Comparaison des suites	26
3.8	Suites récurrentes	27
4	Fonctions numériques	29
4.1	Introduction	29
4.2	Limite d'une fonction	29
4.3	Opérations sur les limites	30
4.4	Fonctions équivalentes	31
4.5	Fonctions continues	32
4.6	Opérations sur les fonctions continues	33

TABLE DES MATIÈRES

4.7	Propriétés des fonctions continues	33
4.8	Fonctions réciproques	34
4.9	Fonctions uniformément continues	35
4.10	Fonctions dérivables	35
4.11	Théorème de Rolle et applications	38
4.12	Théorème des accroissements finis	39
4.13	Règle de l'Hôpital	40
5	Equations différentielles	42
5.1	Equations différentielles linéaires du premier ordre	42
5.1.1	Généralités	42
5.1.2	Résolution de l'équation homogène (H)	43
5.1.3	Résolution de l'équation différentielle normalisée (L)	45
5.1.4	Méthode de la variation de la constante	47
5.1.5	Problème de Cauchy	47
5.1.6	Principe de superposition des solutions	48
5.1.7	Résolution de l'équation non normalisée (L) : $\alpha y' +$ $ay = b$	48
5.2	Equations différentielles linéaires du second ordre	49
5.2.1	Généralités	49
5.2.2	Résolution de l'équation homogène	50
5.2.3	Résolution de l'équation normalisée	52
5.2.4	Résolution de $y'' + ay' + by = c(x)$ avec c fonction quelconque	54
5.3	Equations à variables séparables	56
5.4	Equations de Bernoulli et de Riccati	56
5.4.1	Equation de Bernoulli	56
5.4.2	Equation de Riccati	57

Chapitre 1

Sommes et produits finis

Définition 1.1

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $(n+1)$ nombres complexes. On pose :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Plus généralement, si $0 \leq p \leq n$. On a :

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

L'indice de sommation est une lettre muette, i.e :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{i=p}^n a_i$$

Exemple 1.1

—

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) = \ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n)$$

—

$$\sum_{i=2}^5 \frac{1}{2i} = \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5}$$

Exercice 1.1

Développer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+i}$$

$$T_n = \sum_{j=1}^n \frac{n}{1+j^2}$$

Ecrire à l'aide du symbole somme

$$S_1 = 2 + 4 + 6 + \dots + 20$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 15 - 16$$

Proposition 1.1

Soient $p \leq n$ et $a_p, a_{p+1}, \dots, a_n, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n$ des complexes alors :

— *Linéarité :*

$$\sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k$$

$$\sum_{k=p}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^n a_k$$

— *Relation de Chasles*

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^j a_k + \sum_{k=j+1}^n a_k$$

Exemple 1.2

Sommes usuelles :

$$\sum_{k=p}^n a = (n - p + 1) \times a$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Proposition 1.2

— *Inégalité triangulaire*

$$\left| \sum_{k=p}^n a_k \right| \leq \sum_{k=p}^n |a_k|$$

— *Changement d'indice*

$$\sum_{k=p}^n a_{l+k} = \sum_{j=l+p}^{l+n} a_j$$

Définition 1.2

— *Par définition,*

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$$

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la factorielle de n ou n factorielle est définie par :*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Avec $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exercice 1.2

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^$:*

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Chapitre 2

Topologie de la droite réelle

2.1 Introduction

Nous rappelons dans ce chapitre quelques notions et relations (probablement) déjà vues au lycée comme les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, quelques identités remarquables, la définition de la valeur absolue et de la droite numérique achevée. Ensuite, nous introduisons la notion de majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, plus grand élément et plus petit élément d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Nous définissons aussi la notion de point d'adhérence, de point d'accumulation et d'un point isolé. La fin de ce chapitre est consacrée aux ensembles ouverts, fermés et compacts de $\mathbb{R}$.

2.2 Construction de $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z} = \{\pm n/n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers relatifs. Nous avons $\mathbb{N}$ est strictement contenu dans $\mathbb{Z}$ du fait que $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$. Avec $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. L'ensemble des fractions rationnelles est donné par :

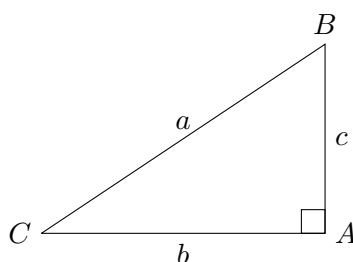
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Nous avons les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Les Grecs ont cru longtemps que toutes les quantités s'exprimaient par des nombres rationnels. Ils se sont aperçu que ce n'est pas toujours le cas. En effet, on peut construire des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un triangle ABC rectangle en A . Si on note a la longueur du segment BC , b celle de CA et c celle de AB , alors le théoème de Pythagore dit qu'on a la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Au cas où $b = c = 1$, on a : $a^2 = 2$, implique $a = \sqrt{2}$

Proposition 2.1

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Il existe d'autres exemples de nombres irrationnels :

- i) Le nombre $\pi = 3,1415\dots$ défini comme la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
- ii) Le nombre d'Euler $e = 2,718\dots$ défini comme la somme infinie :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

- iii) Les racines carrées $\sqrt{n}$ si n est un entier qui n'est pas un carré, i.e. qui n'est pas de la forme $n = k^2, k \in \mathbb{N}$

Etant donné que l'ensemble des rationnels est insuffisant ($\sqrt{2}, \pi, e \notin \mathbb{Q}$ entre autres), nous admettons qu'il existe un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et les nombres irrationnels. Cet ensemble est dit ensemble des réels et sera noté $\mathbb{R}$ et l'on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarque 2.1

- *Il existe d'autres constructions rigoureuses de l'ensemble des réels. Nous citons la construction basée sur "les limites des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ " et la construction basée sur "les coupures de Dedekind".*
- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de l'addition, la multiplication et de la relation d'ordre usuel.*

2.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

2.3.1 Addition et multiplication

$$\begin{array}{ll}
 a + b = b + a & a \times b = b \times a \\
 0 + a = a & 1 \times a = a \text{ si } a \neq 0 \\
 a + b = 0 \iff a = -b & ab = 1 \iff a = \frac{1}{b} \\
 (a + b) + c = a + (b + c) & (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \\
 \\
 a \times (b + c) = a \times b + a \times c & \\
 a \times b = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0) &
 \end{array}$$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Proposition 2.2

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.3.2 Ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 2.1

Soit E un ensemble non vide.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathcal{R}$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si
 - $\mathcal{R}$ est "réflexive" : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
 - $\mathcal{R}$ est "antisymétrique" : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
 - $\mathcal{R}$ est "transitive" : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition 2.2

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Proposition 2.3

La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,

— pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque 2.2

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition :

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff y - x \in \mathbb{R}_+ \\ x < y &\iff (x \leq y \text{ et } x \neq y). \end{aligned}$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

$$\begin{aligned} (a \leq b \text{ et } c \leq d) &\implies a + c \leq b + d \\ (a \leq b \text{ et } c \geq 0) &\implies a \times c \leq b \times c \\ (a \leq b \text{ et } c \leq 0) &\implies a \times c \geq b \times c. \end{aligned}$$

2.3.3 Propriété d'Archimède et partie entière

Proposition 2.4 (Propriété d'Archimède)

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$$

"Pour tout réel x , il existe un entier naturel n qui le dépasse".

Une autre version de cette proposition est la suivante :

Théorème 2.1 (Propriété d'Archimède)

$$\forall x, y > 0, \exists n \in \mathbb{N}/n.y > x$$

Proposition 2.5

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, la partie entière notée $E(x)$, tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

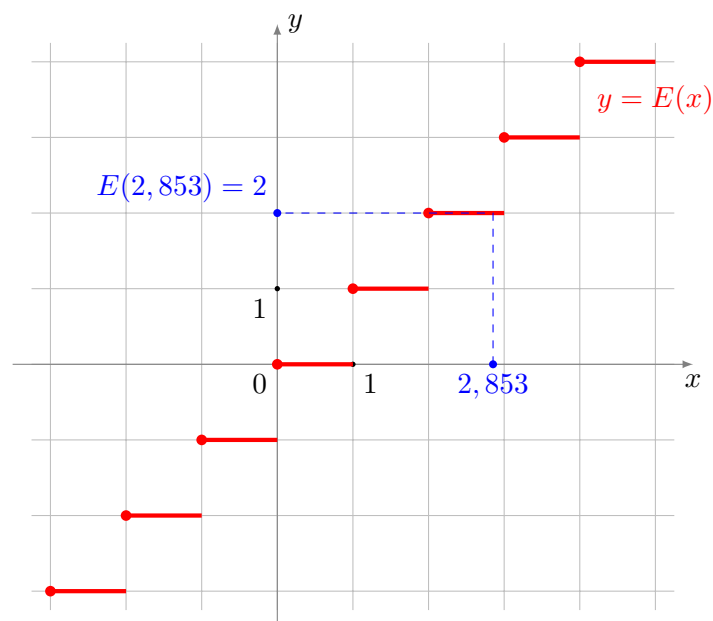
Exemple 2.1

- $E(2,853) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-3,5) = -4$.
- $E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 4$.

Remarque 2.3

- On note aussi $E(x) = [x]$.

— Voici le graphe de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:



2.4 La valeur absolue

Définition 2.3

Pour tout réel x , on pose $|x| = \max(-x, x)$ cette quantité est appelée la valeur absolue de x . La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x, \mathbb{R}, |x| \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x \Rightarrow x \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \iff x^2 = y^2$

Proposition 2.6 (Inégalités triangulaires)

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (première inégalité triangulaire)
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (seconde inégalité triangulaire)

Définition 2.4

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$
Autrement dit :

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout réel x :

$$\begin{cases} x^+ \geq 0 \text{ et } x^- \geq 0 \\ x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{cases}$$

Pour tous réels x, y :

$$\begin{cases} \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \end{cases}$$

2.5 Majorants, minorants et borne supérieure

Définition 2.5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A :

1. est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$. M est dit majorant de A
2. est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$. m est dit minorant de A
3. est bornée si $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a \leq M$

Définition 2.6

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A . Si A est minorée, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A

Théorème 2.2 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée, alors :

$$s = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq s \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, s - \epsilon < a \end{cases}$$

Théorème 2.3

1. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
2. Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 2.7

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x

Théorème 2.4

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists a \in A$, $x < a < y$ (entre deux réels il existe un élément de A), autrement dit : $\forall x, y \in \mathbb{R}, A \cap]x, y[\neq \emptyset$ i.e. A rencontre tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$

Démonstration 2.1

$\Rightarrow$) soit $(x, y) \in \mathbb{R}$, $x < y$ on a A dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists a_n \rightarrow z = \frac{x+y}{2}$, soit $\epsilon = \frac{y-x}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|a_n - z| < \epsilon \Rightarrow z - \epsilon < a_n < z + \epsilon$
 $\Leftarrow$) soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\exists a_n$, $x < a_n < x + \frac{1}{n}$, avec $a_n \rightarrow x$

Théorème 2.5

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Remarque 2.4

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que entre deux réels, il existe toujours un rationnel toutefois l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

2.7 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.8

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle $\iff$ elle est convexe $\iff \forall (x, y) \in I^2, [x, y] \subset I$ autrement dit

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I$$

Définition 2.9

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ cet ensemble est appelé droite numérique achevée.

2.8 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

Définition 2.10

On dit qu'une partie de $U \in \mathbb{R}$ est ouverte ou un ouvert de $\mathbb{R}$ si $U = \emptyset$ ou $\forall x \in U, \exists r > 0,]x - r, x + r[\subset U$. La famille $\{U, U \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$ de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ s'appelle la topologie de $\mathbb{R}$.

Définition 2.11

Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite fermée dans $\mathbb{R}$ ou fermé de $\mathbb{R}$ si son complémentaire $F^c = \mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert.

En pratique, on utilise le résultat suivant :

Théorème 2.6

Soit U, F deux parties de non vides de $\mathbb{R}$

- U est un ouvert de $\mathbb{R}, \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists]a, b[\subset U, x \in]a, b[$
- F fermé $\Leftrightarrow$ pour toute suite (x_n) d'éléments de F convergente dans $\mathbb{R}$ on a $\lim x_n \in F$

Exemple 2.2

1. Tout intervalle ouvert est une partie ouverte de $\mathbb{R}$
2. Tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$
3. Si E désigne $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ alors E est fermé car toute suite de E convergente est stationnaire. On constate aussi que $E^c = \bigcup_{n \in E}]n, n+1[$ est un ouvert

Remarque 2.5

Il y a des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont ni ouvertes ni fermées comme $A = [0, 1[$, en effet, A n'est pas fermée car la suite du terme général $a_n = (1 - \frac{1}{n})$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $1 \notin A$. D'autre part, A n'est pas ouverte car son complémentaire $A^c =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ n'est pas fermé puisque la suite du terme général $b_n = \frac{-1}{n}$ est une suite de A^c qui converge vers $0 \notin A^c$.

Proposition 2.7

Les ouverts de $\mathbb{R}$ vérifient les trois propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$
2. Stabilité par réunion quelconque : toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
3. Stabilité par l'intersection finie : toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Définition 2.12

Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $x \in V$. On dit que V est un voisinage de x si V contient un ouvert contenant x . L'ensemble de tous les voisinages de x est noté $\mathcal{V}$

Exemple 2.3

$[\frac{-1}{2}, 1]$ est un voisinage de 0 car $0 \in]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}[\subset [\frac{-1}{2}, 1]$

Définition 2.13

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$

- x est dit point intérieur à A si A est un voisinage de x , c'est-à-dire si

$$\exists r > 0,]x - r, x + r[\subset A$$

- l'ensemble de tous les points intérieurs à A , éventuellement vide, s'appelle l'intérieur de A et on le note $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{int}(A)$
- x est dit point adhérent à A si

$$\forall r > 0,]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset$$

i.e.

$$\forall r > 0, \exists a \in A, \text{ tel que } a \in]x - r, x + r[$$

- l'ensemble de tous les points adhérents à A s'appelle l'adhérence ou la fermeture de A et se note $\overline{A}$

Remarque 2.6

On a bien $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$

Théorème 2.7

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \text{ une suite d'éléments de } A \text{ telle que } \lim a_n = x$$

Démonstration 2.2

$\Leftarrow$) soit $n \geq 1, a_n \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ la suite $(a_n) \rightarrow x$
 $\Rightarrow$) soit $r > 0$, $\lim a_n = x$, on a $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, |a_n - x| < r$, i.e $a_n \in]x - r, x + r[\cap A$ d'où $x \in \overline{A}$

Remarque 2.7

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\overline{D} = \mathbb{R}$

Théorème 2.8

On a les propriétés suivantes :

1. $(\bar{A})^c = \text{int}(A)$
2. $\mathring{A}$ est un ouvert, il est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclus dans A puisqu'il est la réunion de tous les ouverts contenus dans A
3. A est un ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$
4. $\bar{A}$ est un fermé, il est le plus petit fermé contenant A
5. A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

Exemple 2.4

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ et soit A un intervalle d'extrémités a et b alors $\bar{A} = [a, b]$
2. $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ on a : $\bar{A} = A \cup \{0\}$
3. $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}, \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \bar{\mathbb{Q}} = \emptyset$

2.9 Compact de $\mathbb{R}$

Définition 2.14

Soit $A \subset \mathbb{R}$, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}$

1. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A si $A \subset \cup (A_i)_{i \in I}$
2. Si $J \subset I$ et J finie telle que $A \subset \cup (A_j)_{j \in J}$ alors $(A_j)_{j \in J}$ est sous recouvrement fini du recouvrement $(A_i)_{i \in I}$

Théorème 2.9 (Théorème de Borel-Lebesgue)

De tout recouvrement ouvert d'une partie fermée et bornée de $K \subset \mathbb{R}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini

Définition 2.15

Soit $K \subset \mathbb{R}$, on dit que K est compact ssi de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini (vérifie la propriété de Borel-Lebesgue)

Théorème 2.10

Soit $K \subset \mathbb{R}$ et $K \neq \emptyset$ alors K est compact $\Leftrightarrow K$ est fermé borné

Remarque 2.8

Les intervalles fermés bornés de la forme $[a, b], a < b$ appelés également "les segments" sont des compacts de $\mathbb{R}$

Chapitre 3

Suites numériques

Dans ce chapitre, nous détaillons la définition de la notion de suite numérique. Nous étudions les suites convergentes, les suites adjacentes, les suites récurrentes et les suites de Cauchy et nous les caractérisons. Nous étudions les différents critères de convergence des suites et nous les utiliserons pour calculer leurs limites lorsqu'elles sont convergentes.

3.1 Généralités

Définition 3.1

- On appelle suite numérique toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le nombre réel $u_n = u(n)$ est appelé terme général d'ordre n de la suite.
- Une suite (u_n) est dite arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$. Dans ce cas on a $u_n = nr + u_0$
- Une suite (u_n) est dite géométrique si $u_{n+1} = au_n$. Dans ce cas on a : $u_n = a^n u_0$
- On appelle suite extraite ou encore sous-suite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Son terme général est donné par $v_n = u_{\varphi(n)}$
- $u_n, n \in \mathbb{N}$ est appelé l'ensemble des valeurs prises par la suite

Exercice 3.1

Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{\cos(x)}{4n+1}$ est une suite extraite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Définition 3.2

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$) $\forall n \in \mathbb{N}$

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, ce qui est équivalent à dire que $\exists M \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
- Une suite est dite croissante (resp. décroissante) si $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq m$ alors $u_n \leq u_m$ (resp. $u_n \geq u_m$), ou de manière équivalente $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) $\forall n \in \mathbb{N}$
- Une suite est dite monotone quand elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite (u_n) est dite constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c \in \mathbb{R}$
- Une suite (u_n) est dite stationnaire si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = c \in \mathbb{R}$ (constante à partir d'un certain rang)
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite périodique s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+p} = u_n$. L'entier p est la période de la suite.

Remarque 3.1

L'ensemble des suites numériques est muni des opérations suivantes :

$$(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$$

$$\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n$$

$$(u_n)_n(v_n)_n = (u_n v_n)_n$$

Muni de ces trois opérations, l'ensemble des suites numériques est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2

Si a est un terme de la suite, il est un point adhérent à la suite

3.2 Suites convergentes

Définition 3.3

- On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

On écrit alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ou bien $u_n \rightarrow l$ quand $n \rightarrow \infty$

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si,

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n > N \Rightarrow u_n > A \text{ (resp. } u_n < -A)$$

Proposition 3.1

La limite d'une suite, lorsque elle existe, est unique

Démonstration 3.1

Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers deux limites l_1 et l_2 . On aura alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n > N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n > N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi, pour $n > \max(N_1, N_2)$ on aura

$$|l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < \epsilon$$

Donc $\forall \epsilon > 0, |l_1 - l_2| < \epsilon$ d'où $l_1 = l_2$

Remarque 3.3

- Une suite qui admet une limite infinie est dite divergente
- On ne change pas la nature d'une suite (convergente ou divergente) ni sa limite, si on modifie ou si on supprime un nombre fini de termes de la suite (la convergence d'une suite est une propriété asymptotique)
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ alors toute suite extraite est convergente vers la même limite l
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$, alors l est l'unique point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$. La réciproque est fausse, par exemple la suite :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots\right)$$

admet un seul point d'accumulation 0, mais elle n'est pas convergente.

Proposition 3.2

Toute suite convergente est bornée

Démonstration 3.2

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$, alors pour $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n > N \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

Donc pour $n > N$, on a

$$|u_n| < |l| + 1$$

Posons $M = \sup(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|, |l| + 1)$, on a alors :

$$|u_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.4

- Une suite non bornée est soit divergente, soit qu'elle n'admet pas de limite (il suffit de considérer $u_n = (-1)^n n$ qui n'a pas de limite et qui n'est pas bornée)
- La réciproque de la proposition n'est pas vraie. En effet, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Il suffit de considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(-1)^n$ et $v_n = \sin(n\pi)$ qui sont bornées mais non convergentes.

3.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 3.3

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$. Alors :

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n) = \lambda l$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = l.l'$
- iv) Si $l \neq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{u_n}) = \frac{1}{l}$

Démonstration 3.3

i) et ii) sont des conséquences faciles de la définition. Pour iii) il suffit de remarquer que

$$|u_n v_n - l.l'| \leq |v_n - l'| |l| + |u_n - l| |v_n|$$

et que (v_n) est bornée. Pour iv) remarquons d'abord qu'on a pas supposé $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, nous allons vérifier que $(u_n)_n$ ne peut s'annuler que pour un nombre fini d'indices. En effet,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

Puisque l est non nul, on peut prendre $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ et on a : $n > N_1$ implique $|u_n - l| < \frac{|l|}{2}$. Or :

$$|u_n| = |u_n - l + l| \geq |l| - |u_n - l| \geq |l| - \frac{|l|}{2} > 0$$

D'où $u_n \neq 0$ pour $n > N_1$. D'autre part :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n > N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} < \frac{\epsilon \frac{|l|^2}{2}}{\frac{|l|}{2}|l|}$$

Ce qui entraîne que $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \epsilon$

Définition 3.4

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Un point a est dit point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$ si $\forall \epsilon > 0$, on peut trouver une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|u_n - a| < \epsilon$

Théorème 3.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Un nombre réel a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$ si et seulement si il existe une suite extraite $v_n = u_{\varphi(n)}$ de $(u_n)_n$ qui converge vers a

Démonstration 3.4

Soit $(v_n)_n = (u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers a , i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$$

Puisque φ est strictement croissante $\{n > N, |u_{\varphi(n)} - a| < \epsilon\}$ est infini, donc il ya une infinité de termes de $(u_n)_n$ qui vérifient $|u_n - a| < \epsilon$, par conséquent a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$.

Réciproquement, soit a un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$, il existe alors une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - a| < 1$. Soit p_1 un tel indice. Posons $\varphi(1) = p_1$. La construction de $\varphi(n)$ se fait par récurrence sur n de la manière suivante. Supposons que l'on a construit $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(n-1)$ tels que $|u_{\varphi(k)} - a| < \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, n-1$.

Dans la définition de a valeur d'accumulation et pour $\epsilon = \frac{1}{n}$, il y a une infinité de termes de la suite tels que $|u_p - a| < \frac{1}{n}$. Soit p_n un tel indice qui vérifie en plus $p_n > \varphi(n-1)$ et en passant $\varphi(n) = p_n$, on a :

$$|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n} \text{ et } \varphi(n-1) < \varphi(n)$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est donc une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ et elle vérifie :

$$|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On rappelle que $\mathbb{R}$ est archimédien, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$$

C'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = a$

Théorème 3.2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration 3.5

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée et notons $A_n = \{u_k/k \geq n\}$. Ces ensembles A_n sont bornés. Soit alors $a_n = \inf A_n$ et soit $a = \sup a_n$. Montrons que a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$. D'abord remarquons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, car

$$A_n = \{u_k/k \geq n\} \supset A_{n+1} = \{u_k/k \geq n+1\}$$

ce qui implique

$$\inf(A_n) \leq \inf(A_{n+1})$$

D'autre part, si a n'est pas un point d'accumulation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\exists \epsilon_0 > 0, \text{ tel que }]a - \epsilon_0, a + \epsilon_0[\cap A = \emptyset$$

où $A = \{u_k/k \in \mathbb{N}\} = A_0$. Cela s'exprime par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + \epsilon_0 \text{ ou bien } u_n \leq a - \epsilon_0$$

Notons $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} / u_n \geq a + \epsilon_0\}$ et $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N} / u_n \leq a - \epsilon_0\}$. On remarque que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{N}$ et que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Nous avons trois possibles :

1^{er} cas : Si $\mathcal{A}$ est fini et $\mathcal{B}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit alors $p_0 = \max(\mathcal{A})$. Donc

$$\forall n \geq p_0, u_n \leq a - \epsilon_0$$

ce qui implique que

$$\forall n \geq p_0, a_n \leq u_n \leq a - \epsilon_0$$

Ceci donne

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \leq a - \epsilon_0$$

Ce qui est absurde.

2^e Cas : Si $\mathcal{B}$ est fini et $\mathcal{A}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit $q_0 = \max(\mathcal{B})$, on a :

$$\forall n \geq q_0, u_n \geq a + \epsilon_0$$

Donc

$$\forall n \geq q_0, a_n \geq a + \epsilon_0$$

Il est résulte que

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \geq a + \epsilon_0$$

ce qui est absurde.

3^e cas : il existe deux applications bijectives strictement croissantes :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{A} \\ n &\rightarrow \varphi(n)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{B} \\ n &\rightarrow \psi(n)\end{aligned}$$

Telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{\varphi(n)} \geq a + \epsilon_0 \text{ et } u_{\psi(n)} \leq a - \epsilon_0$$

Ceci implique que la sous-suite extraite $(a_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\psi(n)} \geq a + \epsilon_0$ (resp. $a_{\varphi(n)} \geq a - \epsilon_0$), donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\psi(n)} \geq a + \epsilon_0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(n)} \leq a - \epsilon_0$). Or toute sous-suite extraite d'une suite convergente est aussi une suite convergente et elles convergent vers la même limite. C'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\psi(n)} = a \geq a + \epsilon_0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(n)} = a \leq a - \epsilon_0$) ce qui est absurde. On en conclut que a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc il existe une sous-suite extraite $(u_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a .

3.4 Critères de convergence

Théorème 3.3 (Théorème de convergence monotone)

Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et converge vers sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure).

Démonstration 3.6

Considérons une suite $(u_n)_n$ croissante et majorée, i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \text{ et } \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

Posons $A = \{u_n/n \in \mathbb{N}\}$, $A \neq \emptyset$ et A est majorée, donc A admet une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Or

$$l = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \\ \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } : l - \epsilon < u_N \leq l \leq l + \epsilon \end{cases}$$

Mais, comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l \leq l + \epsilon$$

Ce qui montre que $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Remarque 3.5

Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ et une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Exercice 3.2

i) Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

est convergente

ii) Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ telle que } n > N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq k < 1$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0

Théorème 3.4 (Théorème des gendarmes)

i) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers la même limite l . Soit (x_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang on ait les inégalités

$$u_n \leq x_n \leq v_n$$

Alors la suite (x_n) converge vers l

ii) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) tend vers $+\infty$

iii) Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang alors (v_n) tend vers $-\infty$

Proposition 3.4

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) tend vers l si et seulement si toute sous-suite de (u_n) tend vers l

Démonstration 3.7

Le premier sens est évident puisque la sous-suite $|u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon$ obtenue en prenant pour φ l'identité de $\mathbb{N}$ est la suite (u_n) elle-même.

Pour l'autre sens, soit (v_n) la sous-suite associée à l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Nous pouvons montrer par récurrence que $\varphi(n) \geq n$. Or, (u_n) tend vers l implique que $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N, \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a $|u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon$ i.e $|v_n - l| < \epsilon$

3.5 Suites adjacentes

Définition 3.5

Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- l'une des deux suites est croissante et l'autre décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 3.5

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite

Démonstration 3.8

Supposons la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante, et posons $w_n = v_n - u_n$. On a :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leq 0$$

La suite $(w_n)_n$ est donc décroissante. Comme elle tend vers 0, elle est positive . On en déduit que que :

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_0$$

Ce qui montre que $(u_n)_n$ (resp. $(v_n)_n$) est croissante majorée par v_0 (resp. décroissante minorée par u_0), donc convergente. Dans ce cas, on sait que la somme des limites est égale à la limite de la somme, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Exemple 3.1

Soient les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2.3..n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2.3...n}$$

Ces deux suites sont adjacentes.

3.6 Suites de Cauchy

Définition 3.6

Une suite numérique $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n > N, m > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

Théorème 3.6

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration 3.9

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l . On a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc pour $n > N$ et $m > N$, on a $|u_m - u_n| \leq |u_m - l| + |u_n - l| < \epsilon$, par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Inversement, soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. On commence par montrer qu'elle est bornée. En effet

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n > N \text{ et } m > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

Pour $\epsilon = 1$ et $m = N + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - u_{N+1}| < 1$.
Donc $n > N, \Rightarrow |u_n| < |u_{N+1}| + 1$.

Posons $M = \sup(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|, |u_{N+1}|)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Notons $A_n = \{u_k/k \geq n\}$. La famille $(A_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion (i.e. $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_0$). De plus, tous les A_n sont non vides et bornés car la suite $(u_n)_n$ est bornée. Donc chaque A_n admet une bornée supérieure b_n et une borne inférieure a_n et on a $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ c'est-à-dire que la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite $(b_n)_n$ décroissante. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \geq n, \text{ tel que } a_n \leq u_p < a_n + \frac{\epsilon}{3}$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \exists q \geq n \text{ tel que } b_n - \frac{\epsilon}{3} < u_q \leq b_n$$

Mais, nous savons que $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus, on a $|b_n - a_n| \leq |b_n - u_p| + |u_p - u_q| + |u_q - a_n|$.
Et pour $n > N$, on a :

$$p \geq n > N \Rightarrow 0 \leq u_p - a_n < \frac{\epsilon}{3}$$

et

$$q \geq n > N \Rightarrow -\frac{\epsilon}{3} < u_q - b_n \leq 0$$

On en déduit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |b_n - a_n| < \epsilon$$

D'où les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers la même limite l . Enfin, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_n \leq b_n$ alors la suite $(u_n)_n$ est convergente et sa limite est l .

3.7 Comparaison des suites

Définition 3.7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'à partir d'un certain rang N on a $v_n \neq 0$

1. On dit que (u_n) est équivalent à (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 1 et on écrit $u_n \sim v_n$
2. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0 et on écrit $u_n = o(v_n)$
3. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée et on écrit $u_n = O(v_n)$

Théorème 3.7

Deux suites équivalentes ont la même limite. De plus elles ont le même signe à partir d'un certain rang.

Proposition 3.5

Soit (u_n) une suite et $\lambda \in]0, 1[$. Si à partir d'un certain rang N , on a

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|, \quad \forall n \geq N$$

Alors (u_n) tend vers 0

3.8 Suites récurrentes

Définition 3.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite récurrente est définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.6

Notons D_f le domaine de définition de f . Une suite récurrente u_n est définie s'il existe une partie $D \subset D_f$ telle que : $u_0 \in D$ et $f(D) \subset D$

Proposition 3.6

Si f est croissante sur D alors la suite récurrente (u_n) est monotone et on a :

- i) (u_n) est croissante si et seulement si $f(u_0) \geq u_0$
- ii) (u_n) est décroissante si et seulement si $f(u_0) \leq u_0$

Démonstration 3.10

Soit f une fonction croissante sur D .

- i) $u_0 \leq u_1 = f(u_0)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. En effet, cette relation est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n , on a $u_n \leq u_{n+1}$ implique $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car f est croissante, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc $(u_n)_n$ est croissante.
- ii) Si $f(u_0) \leq u_0$, un raisonnement analogue au précédent montre que $(u_n)_n$ est décroissante.

Proposition 3.7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons $f(I) \subset I$. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est strictement décroissante sur I alors les deux suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones :

- Si $u_2 - u_0 > 0$ la suite (v_n) est strictement croissante
- Si $u_2 - u_0 < 0$ la suite (v_n) est strictement décroissante
- Si $u_2 = u_0$ alors (v_n) est constante égale à u_0
- Si $u_3 - u_1 > 0$ la suite (w_n) est strictement croissante
- Si $u_3 - u_1 < 0$ la suite (w_n) est strictement décroissante
- Si $u_3 = u_1$ alors (w_n) est constante égale à u_1

De plus, si la suite (v_n) est croissante alors la suite (w_n) est décroissante et de même si la suite (v_n) est décroissante alors la suite (w_n) est croissante

Proposition 3.8

Si f est continue sur D (domaine ouvert) et si la suite récurrente (u_n) est convergente alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$ (on dit que x est un point fixe de f).

Démonstration 3.11

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon.$
De même, f continue en $l \in D \iff \forall \alpha > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - l| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \alpha.$ Prenons $0 < \alpha < \epsilon$ et $0 < \alpha < \eta$ alors

$$|f(l) - l| = |f(l) - f(u_n) + f(u_n) - l| \leq |f(l) - f(u_n)| + |f(u_n) - l| \leq \alpha + \epsilon \leq 2\epsilon$$

Comme ϵ est quelconque dans $\mathbb{R}_+^$ alors $|f(l) - l| = 0$ donc $f(l) = l$*

Remarque 3.7

Si f n'admet pas de point fixe alors (u_n) est divergente.

Exercice 3.3

Etudier la convergence des suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 = 0, u_{n+1} = 3 - \sqrt{\frac{u_n}{2}}$
2. $u_0 = a \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Chapitre 4

Fonctions numériques

4.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, nous définissons les notions de limite d'une fonction en un point et sur un ensemble et nous étudions les opérations usuelles sur ces limites. Nous introduisons ensuite les définitions de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction. Nous présentons les théorèmes des valeurs intermédiaires, de Rolle, des accroissements finis, la formule de l'hôpital et leurs démonstrations.

4.2 Limite d'une fonction

Définition 4.1

- On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

On écrit dans ce cas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

- On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

On écrit dans ce cas $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ et l est appelé limite à droite de f en x_0

On définit de la même façon la limite par valeurs inférieures. Il faut signaler que dans la définition de la limite donnée ci-dessous, η dépend à la fois de ϵ et de x_0 . Si par exemple on veut montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1) = 0$$

On écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } |x - 0| < \eta \Rightarrow |\ln(x + 1) - 0| < \epsilon$$

Or

$$|\ln(x + 1) - 0| < \epsilon \iff e^{-\epsilon} - 1 < x < e^{\epsilon} - 1$$

Donc si on prend $0 < \eta < \min(|e^{-\epsilon} - 1|, e^{\epsilon} - 1)$ on obtient que $|x - 0| < \eta \Rightarrow |\ln(x + 1) - 0| < \epsilon$

Exercice 4.1

Montrer les assertions suivantes :

- i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$
- ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors l est unique
- iii) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

4.3 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{A}$

Proposition 4.1

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, alors

- i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$
- ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$
- iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ll'$
- iv) si $l' \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

Proposition 4.2

Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(A) \subset B$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l'$

Démonstration 4.1

$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$ équivaut à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, y \in B \text{ et } |y - l| < \eta \Rightarrow |g(y) - l'| < \epsilon$$

De plus pour ce η , $\exists \nu > 0, x \in A$ et $|x - x_0| < \nu \Rightarrow |f(x) - l| < \eta$
Comme $f(x) \in B$ en posant $y = f(x)$, on aura :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu > 0, x \in A, |x - x_0| < \nu \Rightarrow |g \circ f(x) - l'| < \epsilon$$

4.4 Fonctions équivalentes

Définition 4.2

Deux fonctions f et g sont dites équivalentes quand x tend vers x_0 s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 , $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ où α un nombre réel positif assez petit, tel que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x)h(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1 \end{cases}$$

On écrit alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Exemple 4.1

On a au voisinage de zéro les équivalences suivantes :

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
2. $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$
3. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$
4. $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$
5. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

Remarque 4.1

si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$, on a pas toujours

$$f + g \underset{x_0}{\sim} f_1 + g_1$$

Contre exemple : $f(x) = x + x^2$ et $f_1(x) = x + x^3$, $g(x) = -x$ et $g_1(x) = -x$ on a :

$$\frac{(f+g)(x)}{(f_1+g_1)(x)} = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

Exercice 4.2

Montrer que si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors

$$fg \underset{x_0}{\sim} f_1g_1$$

Exercice 4.3

Calculer en utilisant les fonctions équivalentes, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan^2(x)}{x(1 - \cos(x))}$

4.5 Fonctions continues

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

Définition 4.3

- On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- On dit que f est continue sur $A \subset \mathbb{R}$ si f est continue en tout point de A

Proposition 4.3 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de I , qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Démonstration 4.2

Supposons par hypothèse que f est continue en a , alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de I qui converge vers a . Alors pour le nombre η défini ci-dessus,

$$\exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \eta$$

Ce qui entraîne d'après la continuité de f en a que $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$. Réciproquement, nous allons utiliser la négation. Supposons que $\lim_{y \rightarrow a} f(y) \neq f(a)$. Cela se traduit par,

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists y_n \in I \text{ vérifiant } 0 < |y_n - a| < \eta \text{ et } |f(y_n) - f(a)| \geq \epsilon_0$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n+1}$, $\exists y_n \in I$ vérifiant $0 < |y_n - a| < \eta$ et $|f(y_n) - f(a)| \geq \epsilon_0$. Ainsi, on aura construit une suite $(y_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers a mais telle que la suite des images $f(y_n)_n$ ne converge pas vers $f(a)$

Exercice 4.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall O$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
- $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$

4.6 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 4.4

Soient f et g deux fonctions continues en x et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- i) $f + g, fg, \lambda f, \sup(f, g), \inf(f, g)$ sont continues en x
- ii) Si $f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est continue en x
- iii) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en x et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$ et g continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x

4.7 Propriétés des fonctions continues

Théorème 4.1

L'image par une fonction continue d'un compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur K . Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 4.3

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$

Théorème 4.4 (Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I))

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et soit $\alpha < \beta$ deux éléments de $[a, b]$. Alors pour toute valeur λ comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Démonstration 4.3

On suppose que $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ comme suit

$$\forall x \in [a, b], g(x) = f(x) - \lambda$$

Avec $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$ ou bien $f(\beta) < \lambda < f(\alpha)$. On constate que g est continue sur $[a, b]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[a, b]$. Donc g est continue sur $[\alpha, \beta]$. De plus, on a

$$g(\alpha)g(\beta) < 0$$

On en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un élément $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire que $f(c) = \lambda$

Exercice 4.5

Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ admet une racine réelle dans l'intervalle $]0, 1[$

4.8 Fonctions réciproques

Définition 4.4

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, et $f : A \rightarrow B$. La fonction réciproque (notée f^{-1}) de f , quand elle existe, est définie comme suit

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$
$$\forall b \in B, f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b \text{ et } a \in A$$

Théorème 4.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors f une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. sur $[f(b), f(a)]$) et l'application f^{-1} définie sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) est continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Exemple 4.2

1. La fonction $f(x) = \sin(x)$

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est continue strictement croissante, donc elle est bijective et sa fonction réciproque f^{-1} notée $\arcsin$, définie par

$$\begin{cases} \arcsin(y) = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

est continue strictement croissante de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2. La fonction $f(x) = e^x$

$$f :]-\infty, \infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

est continue strictement croissante, donc elle est bijective et sa fonction réciproque f^{-1} notée $\ln$, définie par

$$\begin{cases} \ln(y) = x \\ 0 \leq y \leq +\infty \end{cases} \iff \begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

4.9 Fonctions uniformément continues

Définition 4.5

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in I, x' \in I, |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Remarque 4.2

- Toute fonction continue sur I est continue sur I , mais la réciproque est fausse.
- La continuité est une notion ponctuelle c'est-à-dire point par point. Alors que la continuité uniforme est une notion globale c'est-à-dire sur l'ensemble tout entier.

Théorème 4.6

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

4.10 Fonctions dérivables

Définition 4.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$

- On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on note cette limite $f'(x_0)$
- On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on note cette limite $f'_d(x_0)$
- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on note cette limite $f'_g(x_0)$

Exemple 4.3

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^x \end{cases}$$

est dérivable en 0. En effet, au $V(0)$ $e^x \sim 1 + x$ donc $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$

Proposition 4.5

1. f est dérivable en x_0 si, et seulement si, les dérivées à gauche et à droite de f en x_0 existent et sont égales

$$f'(x_0) \text{ existe} \iff f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$$

2. Si f est dérivable en x_0 , alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$
3. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 . La réciproque est fausse.

Démonstration 4.4

1. Considérons g la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ comme suit

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$f'(x_0)$ existe est équivalent à dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = l$. Ce qui exprime que f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

2. Comme f est dérivable en x_0 on a

$$\forall \eta > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \eta$$

En particulier si on pose $x = x_0 + h$ avec $|h| < \alpha$, on aura

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \eta$$

Notons alors $\epsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$. Il est clair que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. De plus on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\epsilon(h)$

3. D'après le 2. de cette proposition, on peut écrire au $V(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$$

la limite du membre de droite quand x tend vers x_0 est égale à 0 car :

$$f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ et } (x - x_0) \rightarrow 0$$

Ainsi, on a montré que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ce qui est suffisant pour dire que f est continue en x_0 . Il faut signaler que la réciproque de cette propriété est fausse. Pour cela il suffit de prendre la fonction f , valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Définition 4.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$

- Si f est dérivable en x_0 , alors la fonction f' définie par :

$$\overset{\circ}{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x)$$

est appelée fonction dérivée de f . On peut définir par récurrence sur n , les dérivées successives de f par

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \text{ avec } f^{(0)} = f$$

- L'ensemble des fonctions qui admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n , tel que $f^{(n)}$ soit continue sur I est noté $C^n(I)$. cet ensemble muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire (i.e $(C^n(I), +, \cdot)$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
- Pour $n = 1$, les fonctions de $C^1(I)$ sont dites continûment dérivables.

Proposition 4.6

1. Si f et g sont dérivables en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, alors $f + g$ et fg sont dérivables en x_0 , et on a :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

2. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

3. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))$$

Exercice 4.6

Montrer les formules suivantes :

1. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4.11 Théorème de Rolle et applications

Définition 4.8

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

- On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en x_0 si

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

- On dit que f admet un extremum local en x_0 si elle admet un maximum local en x_0 ou bien elle admet un minimum local en x_0

Proposition 4.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors :

$$f'(x_0) = 0$$

Démonstration 4.5

Supposons que f admet un maximum local en x_0 . Alors

$$\exists \alpha > 0, x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

D'autre part, comme f est dérivable en x_0 , alors

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Or

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ car } f(x) \leq f(x_0)$$

et

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ car } x - x_0 < 0$$

$$d'où f'(x_0) = 0 \text{ car } f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Théorème 4.7 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$

Démonstration 4.6

Si f est constante sur $[a, b]$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Sinon, et comme f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$, bornée et atteint ses bornes. Soit

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \text{ et } m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

alors on a soit $M > f(a)$ ou bien $m < f(a)$. Supposons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = M > f(a)$$

Nous avons un maximum local en c . Donc (d'après la proposition précédente) $f'(c) = 0$

Ce théorème s'interprète géométriquement en disant que la courbe de f admet une tangente horizontale au moins en un point $c \in]a, b[$.

4.12 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.8 (Théorème des accroissements finis (T.A.F))

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $a \neq b$. Alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration 4.7

Posons :

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que g une fonction bien définie sur $[a, b]$ et qu'elle vérifie : g continue sur $[a, b]$, g dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = g(b)$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ telle que $g'(c) = 0$. Ce qui est équivalent à dire que

$$\exists c \in]a, b[, \quad \text{tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation géométrique : le théorème des accroissements finis veut dire que si f est continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ telle que la tangente à la courbe de f en c soit parallèle à la droite joignant les points A et B qui sont respectivement de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Exercice 4.7

Montrer que :

1. f est constante sur $[a, b] \iff f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$
2. f dérivable et strictement croissante sur $[a, b] \iff f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$
3. f dérivable et strictement décroissante sur $[a, b] \iff f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$

Théorème 4.9 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si de plus g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ telle que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Démonstration 4.8

On commence par remarquer que $g(b) \neq g(a)$ car sinon d'après le théorème de Rolle appliqué à g sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Soit F la fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x), \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

La fonction F est à la fois continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

Le théorème de Rolle appliqué à F sur $[a, b]$, montre que qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$F'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

4.13 Règle de l'Hôpital

Théorème 4.10

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un voisinage I centré en x_0 , sauf peut être en x_0 . Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous forme indéterminée ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Alors si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Exercice 4.8

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$

Chapitre 5

Equations différentielles

Dans tout ce chapitre, on notera par $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou $\mathbb{C}$ et par I un intervalle de $\mathbb{R}$

5.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

5.1.1 Généralités

Définition 5.1

1. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation du type :

$$(E) \quad \alpha y' + ay = b$$

Où α, a, b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$

2. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que y est une *solution* de (E) ssi :

$$\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I : \alpha(x)y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \end{cases}$$

Le graphe d'une solution y de (E) est appelé *courbe intégrale*.

Définition 5.2

Dans le cas où $\alpha = 1$, l'équation différentielle (E) devient :

$$(L) \quad y' + ay = b$$

(L) est dite *équation différentielle normalisée* (ou de forme résolue)

Définition 5.3

On appelle *équation homogène associée à (L)* l'équation sans second membre :

$$(H) \quad y' + ay = 0$$

5.1.2 Résolution de l'équation homogène (H)

La fonction a étant continue sur l'intervalle I , donc elle est intégrable sur I . Soit F une primitive de a sur I (i.e $\forall x \in I, F'(x) = a(x)$). L'équation (H) s'écrit alors :

$$(H) : \quad y'(x) + F'(x)y(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Considérons la fonction $x \rightarrow e^{F(x)}$. Cette fonction ne s'annule pas sur I , donc l'équation (H) est équivalente à :

$$\forall x \in I, \quad y'(x)e^{F(x)} + F'(x)e^{F(x)}y(x) = 0$$

Soit alors :

$$\frac{d}{dx}[y(x)e^{F(x)}]$$

Donc

$$y(x)e^{F(x)} = \text{constante} = c$$

Finalement :

$$y(x) = c.e^{-F(x)}$$

Théorème 5.1

Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + ay = 0$ sont les fonctions :

$$\begin{aligned} y : \quad I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\rightarrow c.e^{-F(x)} \end{aligned}$$

Remarque 5.1

Dans la pratique, pour la résolution de l'équation différentielle (H) : $y' + ay = 0$ on écrit :

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

donc

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

en intégrant, on obtient :

$$\ln(|y(x)|) = - \int a(x)dx + k$$

soit

$$|y(x)| = e^{\int a(x)dx + k} = c.e^{\int a(x)dx}$$

Cette représentation n'est pas valable lorsque a est complexe ou admet des discontinuités.

Théorème 5.2

Notons par $S(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation $(H) : y' + ay = 0$. $S(H)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de plus $\dim S(H) = 1$

Démonstration 5.1

Il suffit de montrer que $S(H)$ est un sous espace vectoriel de $D^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

$$S(H) = \{y : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ dérivables } / y' + ay = 0\}$$

Il est clair que $S(H) \neq \emptyset$ (la fonction nulle appartient), et si $f, g \in S(H), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda f + \mu g)' + a(\lambda f + \mu g) = \lambda(f' + af) + \mu(g' + ag) = 0$$

Donc

$$\lambda f + \mu g \in S(H)$$

Et on a : $S(H) = \{y : x \rightarrow c.e^{-F(x)}\}$ où c est une constante.
Donc $\dim(S(H)) = 1$

Exemple 5.1

Soit les exemples :

1.

$$(H_1) : y' + 5y = 0$$

Les solutions de (H_1) sont les fonctions y définies par $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $y(x) = c.e^{-\int 5dx} = c.e^{-5x}$

2.

$$(H_2) : y' - 5x^2y = 0$$

Les solutions de (H_2) sont les fonctions y définies par $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $y(x) = c.e^{-\int -5x^2dx} = c.e^{\frac{5}{3}x^3}$

3.

$$(H_3) : y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

La fonction $x \rightarrow a(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas définie en 0. On doit travailler sur les deux intervalles : $I_1 =]-\infty, 0]$ et $I_2 =]0, +\infty[$ Sur I_1 , la solution est $y_1(x) = c_1 e^{\frac{1}{x}}$ et sur I_2 , la solution est $y_2(x) = c_2 e^{\frac{1}{x}}$

5.1.3 Résolution de l'équation différentielle normalisé (L)

Considérons l'équation différentielle normalisée (L) : $y' + ay = b$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et soit (H) : $y' + ay = 0$ l'équation homogène associée à (L). Et notons par : $S(H)$ l'ensemble des solutions de (H) et $S(L)$ l'ensemble des solutions de (L). Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.3

On se donne une solution particulière $\psi \in S(L)$. Alors on a :

$$S(L) = \psi + S(H)$$

Démonstration 5.2

On va montrer la double inclusion :

- Soit $y \in S(L)$, montrons que $y \in (\psi + S(H))$
 On a : $(y - \psi)' + a(y - \psi) = (y' + ay) - (\psi' + a\psi) = 0$, donc
 $(y - \psi) \in S(H)$ donc $y \in \psi + S(H)$
- Soit $y \in \psi + S(H)$, montrons que $y \in S(L)$,
 On a :

$$\begin{aligned} y \in \psi + S(H) &\Leftrightarrow (y - \psi) \in S(H) \\ &\Leftrightarrow (y - \psi)' + a(y - \psi) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y' + ay) - (\psi' + a\psi) = 0 \\ &\Leftrightarrow y' + ay - b = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in S(L) \end{aligned}$$

Remarque 5.2

Ce théorème montre que la solution générale de (L) s'obtient par la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (L), nous donnons quelques équations différentielles pour lesquelles on arrive à trouver une solution particulière.

Proposition 5.1

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n . Alors l'équation différentielle :

$$(L) : y' + ay = P(x)$$

admet comme solution particulière un polynôme ψ tel que :

$$\begin{cases} \deg(\psi) = n + 1 & \text{si } a = 0 \\ \deg(\psi) = n & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration 5.3

- si $a = 0$, l'équation différentielle (L) devient $y' = P(x)$. Puisque P est degré n , il est clair qu'une solution particulière ψ de (L) sera de degré $n + 1$
- si $a \neq 0$, on pose $P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$, soit $\psi = \alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n$ un polynôme de degré n solution particulière de (L) alors $\psi' + a\psi = P(x)$ implique que $(\alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + \dots + n\alpha_nx^{n-1} + a(\alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = \alpha_1 + a\alpha_0 \\ p_1 = 2\alpha_2 + a\alpha_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} = n\alpha_n + a\alpha_{n-1}p_n = a\alpha_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \frac{p_n}{a} \\ \alpha_{n-1} = \frac{p_{n-1} - n\alpha_n}{a} \\ \alpha_k = \frac{p_k - (k+1)\alpha_{k+1}}{a} \quad \forall k \in \{n-1, n-2, \dots, 1\} \end{cases}$$

D'où l'existence et l'unicité de ψ de degré n .

Proposition 5.2

Soit $a \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n . Alors l'équation différentielle :

$$(L) : y' + ay = P(x)e^{mx}$$

admet une solution particulière ψ de la forme $\psi(x) = q(x)e^{mx}$, où q est un polynôme tel que :

$$\begin{cases} \deg(q) = n + 1 \text{ si } m + a = 0 \\ \deg(q) = n \text{ si } m + a \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration 5.4

Soit $\psi(x) = q(x)e^{mx}$ une solution particulière de (L) alors : $q'(x)e^{mx} + me^{mx}q(x) + aq(x)e^{mx} = P(x)e^{mx}$ donc : $q'(x) + (m + a)q(x) = P(x)$, et on applique la proposition précédente.

Exemple 5.2

Soit à intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^3 - 3x$ solution particulière de degré 3
2. $y' - y = (x^3 - 2x)e^{2x}$ solution particulière sous forme $q(x)e^{2x}$ avec q de degré 3

5.1.4 Méthode de la variation de la constante

Cette méthode permet d'avoir une solution particulière de (L) même dans le cas où la fonction a n'est pas un scalaire ou le second membre n'est pas de la forme de $P(x)$ ou de $P(x)emx$. Le principe de la méthode de la variation de la constante consiste à :

1. Chercher la solution générale de l'équation homogène (H) associée à (L) , qui est de la forme $y(x) = ce^{-F(x)}$, où F est une primitive de a sur l'intervalle I
2. On cherche à déterminer une fonction $c(x)$, dérivable, telle que la fonction $c(x)e^{-F(x)}$ soit une solution de (L) . On se ramène alors à un calcul de primitive.

Exemple 5.3

Soit les exemples :

1. Soit $(L) : y' + 3x^2y = x^2$, l'équation homogène associée à (L) est : $y' + 3x^2y = 0$ et sa solution générale est : $y(x) = c.e^{-x^3}$. On fait varier la constante c en cherchant une solution de la forme $y(x) = c(x)e^{-x^3}$ ici la constante c devient une fonction. Donc $c'(x)e^{-x^3} - 3x^2c(x)e^{-x^3} + 3x^2c(x)e^{-x^3} = x^2$ donc $c'(x)e^{-x^3} = x^2$ puis $c(x) = \int x^2e^{x^3} + k = \frac{1}{3}e^{x^3} + k$. Ainsi, la solution de (L) s'écrit donc : $y(x) = (\frac{1}{3}e^{x^3} + k)e^{-x^3} = \frac{1}{3} + ke^{-x^3}$
2. Soit $(L) : y' - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$, la solution générale de (L) est : $y(x) = ce^{\sqrt{1+x^2}}$, en appliquant la méthode de la variation de la constante on trouve la solution générale : $y(x) = -3 + ke^{\sqrt{1+x^2}}$

5.1.5 Problème de Cauchy

Définition 5.4

On appelle problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle $(L) : y' + ay = b$, tout système de la forme :

$$(C) \begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Où $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. $y(x_0) = y_0$ est dite condition initiale du problème de Cauchy (C) .

Théorème 5.4

Etant donnés $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy : (C) admet une solution unique sur tout l'intervalle I .

Démonstration 5.5

La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = c.e^{-F(x)}$ avec F la primitive de a sur I et c une constante, en faisant varier la constante c , on obtient la solution générale de l'équation avec second membre sous la forme $y(x) = \int_{x_0}^x b(u)e^{F(u)}du + ke^{-F(x)}$. La condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit $ke^{-F(x_0)} = y_0$ donc $k = y_0e^{F(x_0)}$. On a donc l'existence et l'unicité de la constante k . D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

5.1.6 Principe de superposition des solutions

Proposition 5.3

Soit l'équation différentielle linéaire : $(L) : y' + ay = b_1(x) + b_2(x)$ si y_1 est une solution de $(L_1) : y' + ay = b_1(x)$ et y_2 est une solution de $(L_2) : y' + ay = b_2(x)$, alors $y = y_1 + y_2$ est une solution de $(L) : y' + ay = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration 5.6

Avec les notations et sous les conditions de la proposition, on a :
 $(y_1(x) + y_2(x))' + a(y_1(x) + y_2(x)) = (y_1'(x) + ay_1(x)) + (y_2'(x) + ay_2(x)) = b_1(x) + b_2(x)$

5.1.7 Résolution de l'équation non normalisée $(L) : \alpha y' + ay = b$

Considérons l'équation différentielle $\alpha y' + ay = b$ avec $\alpha, a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues. Là où α ne s'annule pas, l'équation différentielle (L) peut s'écrire $(L') : y' + a \frac{\alpha}{\alpha} y = \frac{b}{\alpha}$. Donc pour résoudre (L) , on commence par résoudre (L') là où elle ne s'annule pas puis on raccorde les solutions pour avoir une solution de (L) sur tout l'intervalle I . Supposons par exemple que $I = \mathbb{R}$ et α s'annule en x_0 i.e $(\alpha(x_0) = 0)$. Alors posons $I_1 =]-\infty, x_0[$ et $I_2 =]x_0, +\infty[$ et soit y_1 la solution générale de (L') sur I_1 et y_2 la solution générale de (L') sur I_2 . Pour que y_1 et y_2 se raccordent en une solution sur tout l'intervalle I , il faut que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_2(x) = l$$

On définit alors une solution y continue sur I par :

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ y_2(x) & \text{si } x \in I_2 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Il faut aussi que y soit dérivable en x_0 .

Exemple 5.4

Soit l'équa. diff. (E) : $x^3y' - 2y = 0$, les fonctions $\alpha(x) = x^3, a(x) = -2, b(x) = 0$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction α s'annule en 0, soit donc $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. Sur I_1 la solution générale de (E) est : $y_1(x) = c_1 e^{\frac{-1}{x^2}}$ et sur I_2 la solution générale de (E) est : $y_2(x) = c_2 e^{\frac{-1}{x^2}}$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} c_1 e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} c_2 e^{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

On définit alors des solutions y continues sur $\mathbb{R}$ par :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} c_1 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ c_2 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c_1 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = 0$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c_2 e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = 0$$

Donc y est dérivable en 0. Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} c_1 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ c_2 e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \in I_2 \end{cases}$$

5.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

5.2.1 Généralités

Définition 5.5

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre toute équation de la forme :

$$(E) : \quad \alpha y'' + ay' + by = c$$

Où α, a, b, c sont des fonctions continues d'un intervalle I vers un corps $\mathbb{K}$. Notre étude se limitera ici au cas où α, a, b sont constants ($\alpha \neq 0$)

Définition 5.6

Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}, x \rightarrow y(x)$ sera dite solution de (E) ssi :

- y est deux fois dérivable sur I
- $\forall x \in I, \alpha y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$

Le cas où $\alpha = 1$, l'équation devient : $(L) : y'' + ay' + by = c$ qui est dite équation normalisée.

L'équation homogène associée à (L) est : $(H) : y'' + ay' + by = 0$

5.2.2 Résolution de l'équation homogène

Considérons l'équation homogène $(H)y'' + ay' + by = 0$ et soit $S_{\mathbb{K}}(H)$ l'ensemble des solutions de (H) .

Théorème 5.5

$S_{\mathbb{K}}(H)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Démonstration 5.7

Il suffit de montrer que $S_{\mathbb{K}}(H)$ est un sous espace vectoriel de $D^2(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

a Solution complexe de (H)

Théorème 5.6

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\dim(S_{\mathbb{K}}(H)) = 2$

Démonstration 5.8

Commençons par chercher une solution de (H) de la forme $\phi(x) = e^{rx}$ alors (H) s'écrit : $e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$.

L'équation $(E) : r^2 + ar + b = 0$ est dite équation caractéristique.

Soit α une solution de (E) , α existe car on est dans $\mathbb{C}$. Donc $e^{\alpha x}$ est une solution de (H) .

Posons $\forall x \in I, y(x) = g(x)e^{\alpha x}$. On calcule y'', y' et on remplace dans (H) donc $g'' + (a + 2\alpha)g' = 0$

- Si $\Delta = 0$, alors $\alpha = \frac{-a}{2}$ alors $g''(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = c_1 \Rightarrow g(x) = (c_1x + c_2)$ D'où $y(x) = (c_1x + c_2)e^{\alpha x}$.

$$S_{\mathbb{C}}(H) = \{y : I \rightarrow \mathbb{C} \quad x \rightarrow (c_1x + c_2)e^{\alpha x}\}$$

$S_{\mathbb{C}}(H)$ est engendré par la famille $(xe^{\alpha x}, e^{\alpha x})$

Montrons que $(xe^{\alpha x}, e^{\alpha x})$ est libre.

On a $\forall x \in I, \alpha xe^{\alpha x} + \mu e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha x + \mu = 0 \Rightarrow \alpha = \mu = 0$ car $(1, x)$ est une base pour l'espace des polynômes de degré 1.

Donc $\dim(S_{\mathbb{K}}(H)) = 2$

- Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux solutions distincts : α et β tels que : $\alpha + \beta = -a$
 $g'' + (a + 2\alpha)g' = 0$ donc $g'(x) = c_1 e^{-(a+2\alpha)x}$ d'où $g(x) = \frac{-c_1}{2\alpha+a} e^{-(a+2\alpha)x} + c_2$
 Donc $y(x) = (\frac{-c_1}{2\alpha+a} e^{-(a+2\alpha)x} + c_2) e^{\alpha x} = \frac{-c_1}{2\alpha+a} e^{(-a-\alpha)x} + c_2 e^{\alpha x}$
 Donc
- $$y(x) = \frac{c_1}{\beta - \alpha} e^{\beta x} + c_2 e^{\alpha x}$$

Or $(e^{\alpha x}, e^{\beta x})$ est libre, donc $\dim(S_{\mathbb{K}}(H)) = 2$

Théorème 5.7

On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit l'équation caractéristique $(E) : r^2 + ar + b = 0, \Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution double $\alpha = \frac{-a}{2}$ et les solutions de (H) sont de la forme : $x \rightarrow (c_1 x + c_2) e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) admet deux solutions distincts α, β et les solutions de (H) sont de la forme : $x \rightarrow c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

b Solution réelle de (H)

Considérons l'équation différentielle homogène $(H) : y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont maintenant des réels. Le théorème suivant donne les solutions réelles de (H) .

Théorème 5.8

Soit $(E) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique et $\Delta = a^2 - 4b$

- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles distincts α et β et les solutions de (H) sont de la forme : $x \rightarrow c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution double $\alpha = \frac{-a}{2}$ et les solutions de (H) sont de la forme : $x \rightarrow (c_1 x + c_2) e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha = r + is$ et $\beta = r - is$ et les solutions de (H) sont de la forme : $x \rightarrow (\alpha \cos(sx) + \mu \sin(sx)) e^{rx}, \alpha, \mu \in \mathbb{R}$

Exemple 5.5

Trouvons les solutions complexes et réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y'' - 4y' + 4y = 0$

2. $(E_2) : y'' + 3y' + 2y = 0$

3. $(E_3) : y'' + 2y' + 4y = 0$

5.2.3 Résolution de l'équation normalisée

Théorème 5.9

Soit $S(L)$ l'ensemble des solutions de l'équation normalisée $(L) : y'' + ay' + by = c$ et $S(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) . Alors : si $\psi \in S(L)$ alors $S(L) = \psi + S(H)$

Remarque 5.3

Ce théorème exprime le fait que la solution générale de (L) s'obtient par la somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (L) . Nous donnons quelques équations pour lesquels on arrive à trouver une solution particulière ψ .

a Le second membre est un polynôme

Proposition 5.4

Soit P un polynôme de degré n . Alors l'équation différentielle $(L) : y'' + ay' + by = P(x)$ admet comme solution particulière un polynôme ψ tel que :

$$\begin{cases} \deg(\psi) = n & \text{si } b \neq 0 \\ \deg(\psi) = n + 1 & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0 \\ \deg(\psi) = n + 2 & \text{si } a = b = 0 \end{cases}$$

Démonstration 5.9

A titre d'exercice.

b Le second membre de la forme $e^{kx}P(x)$

Proposition 5.5

Considérons l'équation différentielle $(L) : y'' + ay' + by = e^{kx}P(x)$ avec $k \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n . Soit $(E) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique. Alors l'équation différentielle admet comme solution particulière un polynôme $\psi(x) = e^{kx}Q(x)$ telle que :

$$\begin{cases} \deg(Q) = n & \text{si } k \text{ n'est pas une racine de } (E) \\ \deg(Q) = n + 1 & \text{si } k \text{ est une racine simple de } (E) \\ \deg(Q) = n + 2 & \text{si } k \text{ est une racine double de } (E) \end{cases}$$

Démonstration 5.10

A titre d'exercice.

Exemple 5.6

Soit à résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$
2. $(E_2) : y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^{2x}$
3. $(E_3) : y'' - 4y' + 4y = (x^3 - x)e^{-x}$
4. $(E_4) : y'' - 4y' + 4y = (x^3 + 2x^2 + x)e^{-x}$

c Le second membre de la forme $A(x) \cos(kx) + B(x) \sin(kx)$

Proposition 5.6

Considérons l'équation différentielle $(L) : y'' + ay' + by = A(x) \cos(kx) + B(x) \sin(kx)$ avec $a, b, k \in \mathbb{R}$ et A, B deux polynômes réels. Soit $(E) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique. Alors l'équation différentielle (L) admet une solution particulière de la forme $\psi(x) = U(x) \cos(kx) + V(x) \sin(kx)$ avec U, V deux polynômes telles que :

$$\begin{cases} \sup(\deg(U), \deg(V)) = \sup(\deg(A), \deg(B)) & \text{si } ik \text{ n'est pas une racine de } (E) \\ \sup(\deg(U), \deg(V)) = 1 + \sup(\deg(A), \deg(B)) & \text{si } ik \text{ est une racine de } (E) \end{cases}$$

Démonstration 5.11

A titre d'exercice.

d Le second membre de la forme $(A(x) \cos(kx) + B(x) \sin(kx))e^{mx}$

Proposition 5.7

Considérons l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = (A(x) \cos(kx) + B(x) \sin(kx))e^{mx}$$

avec $a, b, k \in \mathbb{R}$ et A, B deux polynômes réels. En posant $y(x) = z(x)e^{mx}$ on se ramène à une équation différentielle du second ordre avec comme second membre $A(x) \cos(kx) + B(x) \sin(kx)$

Démonstration 5.12

A titre d'exercice.

Exemple 5.7

Trouvons les solutions réelles de $(E) : y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$

5.2.4 Résolution de $y'' + ay' + by = c(x)$ avec c fonction quelconque

a Méthode de variation de constante

Définition 5.7

Soit $(\varphi(x), \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$. On appelle Wronskien de (φ, ψ) le déterminant :

$$W_{(\varphi, \psi)}(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$$

En on a $\forall x \in \mathbb{R}, W_{(\varphi, \psi)}(x) \neq 0$

Démonstration 5.13

Il y a trois cas à envisager :

1. $\varphi(x) = e^{\alpha x}, \psi(x) = e^{\beta x}$ on a :

$$W_{(\varphi, \psi)}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)e^{(\alpha+\beta)x} \neq 0$$

2. $\varphi(x) = e^{\alpha x}, \psi(x) = xe^{\beta x}$ on a :

$$W_{(\varphi, \psi)}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & (1 + \alpha x)e^{\beta x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \neq 0$$

3. $\varphi(x) = \cos(sx)e^{rx}, \psi(x) = \sin(sx)e^{rx}$ on a :

$$W_{(\varphi, \psi)}(x) = \begin{vmatrix} \cos(sx)e^{rx} & (-s \sin(sx) + r \cos(sx))e^{rx} \\ \sin(sx)e^{rx} & (s \cos(sx) + r \sin(sx))e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0$$

Proposition 5.8

Soit $(\varphi(x), \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$. On fait varier les constantes en cherchant une solution particulière g de (L) vérifiant :

$$\begin{cases} g(x) = \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x) & (1) \\ g'(x) = \lambda(x)\varphi'(x) + \mu(x)\psi'(x) & (2) \end{cases}$$

Et g serait une solution de (L) ssi $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 & (3) \\ \lambda'(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi'(x) = c(x) & (4) \end{cases}$$

Démonstration 5.14

A titre d'exercice.

Exemple 5.8

Soit à intégrer l'équation différentielle (L) :

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos(x)} \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

La solution générale $y(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^x$.

Soit $(\varphi(x), \psi(x))$ une base de $S_{\mathbb{K}}(H)$ avec $(\varphi(x), \psi(x)) = (\lambda \cos(x)e^x, \beta \sin(x)e^x)$, on fait varier les constantes λ, β en cherchant une solution particulière g vérifiant :

$$\begin{cases} g(x) = (\lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x))e^x \\ g'(x) = \lambda(x)(-\sin(x) + \cos(x))e^x + \mu(x)(\cos(x) + \sin(x))e^x \end{cases}$$

Avec $\lambda'(x), \mu'(x)$ sont des solutions du système :

$$\begin{cases} (\lambda'(x) \cos(x) + \mu'(x) \sin(x))e^x = 0 \\ \lambda'(x)(-\sin(x) + \cos(x)) + \mu'(x)(\cos(x) + \sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

La solution générale de (L) est alors : $y(x) = (\ln(\cos(x)) + c_1) \cos(x)e^x + (x + c_2) \sin(x)e^x$

b Problème de Cauchy

Définition 5.8

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle :

$$(L) : y'' + ay' + by = c(x)$$

Tout système de la forme :

$$(C) \begin{cases} y'' + ay' + by = c(x) \\ y(x_0) = \alpha(x_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

Théorème 5.10

Le problème de Cauchy (C) admet une solution unique y définie sur l'intervalle I

c Méthode ramenant à une équation du premier ordre

Proposition 5.9

Soit l'équation différentielle (L) : $y'' + ay' + by = c(x)$. Supposons que l'on connaît une solution $\varphi(x)$ de (H) ne s'annulant pas sur I , alors en faisant le changement d'inconnu $y(x) = z(x)\varphi(x)$, on se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 5.9

Soit l'équation différentielle (L) sur $I =]-1, +\infty[$:

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$$

On montre que $\varphi(x) = e^x$ est une solution de l'équation homogène puis on pose $y(x) = z(x)e^x$ on se ramène à $(1+x)z'' + 2xz' = xe^{-2x}$ si on pose $z' = u$ on aura alors : $(1+x)u' + 2xu = xe^{-2x}$ qui est une équation différentielle linéaire de premier ordre.

5.3 Equations à variables séparables

Définition 5.9

On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle de la forme :

$$(S) : y' = a(x)b(y)$$

Où a et b sont deux fonctions continues sur les intervalles I_1 et I_2 . De plus b ne s'annule pas sur l'intervalle I_2 .

Pour la résolution de (S), on écrit : $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$ donc $\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx$, en intégrant on aura :

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx + k$$

Exemple 5.10

Soit l'équation différentielle :

$$e^{-x^2+y}y' = x$$

On pose $y' = \frac{dy}{dx}$ donc $e^{-x^2}\frac{dy}{dx}e^y = x$ puis $e^y dy = xe^{x^2}dx$ en intégrant on aura $e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ finalement $y = \ln(\frac{1}{2}e^{x^2} + c)$

5.4 Equations de Bernoulli et de Riccati

5.4.1 Equation de Bernoulli

Définition 5.10

Une équation différentielle de Bernoulli est de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^\alpha$$

Où a, b, c sont des fonctions continues de x . ($y = 0$ est une solution triviale). Pour les x tels que $a(x) \neq 0$, on a :

$$y' + A(x)y = B(x)y^\alpha$$

Pour l'intégration de l'équation de Bernoulli, on procède comme suit :

1. On divise par y^α
2. On utilise le changement de fonction inconnue $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$

Exemple 5.11

Soit à résoudre l'équation suivante pour $x > 0$:

$$xy' + y = y^2 \ln(x)$$

, alors on divise par y^2 puis on pose $z = \frac{1}{y}$. On obtient : $-xz' + z = \ln(x)$ qui est une équation linéaire de premier ordre.

5.4.2 Equation de Riccati

Définition 5.11

Une équation différentielle de Riccati est une équation de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^2 + d(x)$$

Où a, b, c, d sont des fonctions continues de x . Pour les x tels que $a(x) \neq 0$, on a :

$$y' + A(x)y = B(x)y^2 + C(x)$$

Si $C(x) = 0$, nous retrouvons un cas particulier de l'équation de Bernoulli.

Pour l'intégration de l'équation de Riccati, on procède comme suit :

1. On cherche une solution particulière y_p
2. On utilise le changement de fonction inconnue $z(x) = y(x) - y_p(x)$
3. On utilise le changement de fonction inconnue $u(x) = \frac{1}{z(x)}$

Exemple 5.12

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$$

, on a $y_p(x) = -x^2$ est une solution particulière. On pose alors $z = y + x^2$ i.e $y = z - x^2$ on obtient alors $x^3z' + z^2 - x^2z = 0$ on pose $u = \frac{1}{z}$ on obtient alors : $-x^3u' + 1 - ux^2 = 0$ qui est une équation linéaire de premier ordre.